

# Tomographie in hochaufgelösten SAR-Daten

## Masterarbeit

von

B.Sc. Lukas Schack

19. Mai 2011 – 31. Oktober 2011

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Uwe Sörgel  
Zweitprüfer: Dipl.-Ing. Alexander Schunert

Betreuer: Dipl.-Ing. Alexander Schunert

Lukas Schack  
Königsworther Straße 13  
30167 Hannover

Hiermit versichere ich, dass ich die von mir vorgelegte Arbeit selbstständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen, Internet-Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen und Abbildungen –, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Hannover, den 31. Oktober 2011

(Unterschrift)

---

B.Sc. Lukas Schack

# MASTERARBEIT

- Kandidat** B. sc. Lukas Schack
- Aufgabe** Tomographie in hochaufgelösten SAR-Daten
- Motivation** SAR-Sensoren (SAR - Synthetic Aperture Radar) sind neben optischen Sensoren eine der am häufigsten eingesetzten Erdbeobachtungsinstrumente. Dabei bietet die SAR-Sensorik den wesentlichen Vorteil Daten unabhängig von Wetter und Tageszeit aufnehmen zu können. Allerdings führt deren Abbildungsgeometrie vor allem in urbanen Gebieten zu erheblichen Problemen. Der SAR-Sensor beleuchtet die Szene in Schrägsicht und misst die Distanz zu Objekten der Szene. Zwei verschiedene Objekte mit gleicher Distanz zum Sensor können also nicht getrennt werden. In Städten führt dies etwa dazu, dass das Signal von Erdboden und Fassade oftmals nicht getrennt werden kann. Die SAR-Tomographie ist ein Verfahren, das durch Nutzung eines Stapels von SAR-Bildern, Objekte in gleicher Entfernung zum SAR-Sensor zu trennen versucht.
- Ansatz** Ziel der Masterarbeit ist die Untersuchung verschiedener Verfahren zur tomographischen Rekonstruktion und deren Evaluierung.
- Skills** Im Rahmen der Arbeit ist ein solides Grundwissen in Bild/Signalverarbeitung, Radarfernerkundung und Statistik erforderlich. Weiterhin ist die Kenntnis einer Programmier- oder Skriptsprache (C/C++, Matlab, IDL) notwendig.

**Ansprechpartner**



**Institut für Photogrammetrie und GeoInformation**

Dipl.-Ing. Alexander Schunert - [schunert@ipi.uni-hannover.de](mailto:schunert@ipi.uni-hannover.de) 0511/762-19388  
[www.ipi.uni-hannover.de](http://www.ipi.uni-hannover.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>5</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>6</b>
1.1 Motivation: Die dritte Dimension . . . . .	6
1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2 Grundlagen</b>	<b>10</b>
2.1 TerrarSAR-X . . . . .	10
2.2 Fouriertransformation . . . . .	11
2.3 Radarsignal . . . . .	13
2.4 Vorverarbeitung . . . . .	18
2.5 Punktauswahl . . . . .	19
2.6 Inversionsproblem . . . . .	20
<b>3 Inversionsansätze</b>	<b>24</b>
3.1 Beamforming . . . . .	24
3.2 Singular Value Decomposition . . . . .	26
3.2.1 Truncated Singular Value Decomposition . . . . .	28
3.2.2 Weighted Singular Value Decomposition . . . . .	29
3.3 Nonlinear Least Squares Estimation . . . . .	30
3.4 Compressive Sensing . . . . .	31
3.4.1 Mathematische Beschreibung des Compressive Sensing . . . . .	32
3.4.2 Anwendung des Compressive Sensing auf TomoSAR . . . . .	35
3.5 Diskussion der vorgestellten Verfahren . . . . .	37
<b>4 Modellselektion</b>	<b>38</b>
4.1 Ansatz . . . . .	38
4.2 Bayesian Information Criterion . . . . .	39
4.3 Akaike Information Criterion . . . . .	42
<b>5 Plausibilitätskriterien</b>	<b>44</b>
5.1 Statistische Größen . . . . .	44
5.1.1 Anwendungsbeispiel . . . . .	48
5.2 Nachbarschaftsbeziehung . . . . .	50
5.2.1 Anwendungsbeispiel . . . . .	53
5.3 Diskussion der vorgestellten Plausibilitätskriterien . . . . .	53
<b>6 Ergebnisse</b>	<b>56</b>

---

6.1	Anwendung auf synthetische Daten . . . . .	56
6.1.1	Rauschsimulation . . . . .	56
6.1.2	Vergleich von Beamforming, TSVD und WSVD mit Hilfe des Plausibilitätskriteriums . . . . .	58
6.1.3	Einfluss des Rauschens . . . . .	60
6.1.4	Einfluss der Basislinienausdehnung . . . . .	64
6.1.5	Einfluss der Gleichmäßigkeit der Basislinien . . . . .	65
6.1.6	Übersicht der Einflüsse . . . . .	67
6.2	Anwendung auf reale Daten . . . . .	68
6.2.1	Einfluss der Modellselektion auf den Verlauf der Elevationsprofile . . .	68
6.2.2	Einfluss von $\lambda_K$ bei Compressive Sensing . . . . .	69
6.2.3	Untersuchung einzelner Elevationsprofile . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Nachbearbeitung</b>	<b>77</b>
7.1	Regression nach kleinsten Quadraten . . . . .	77
7.2	Clusterung . . . . .	78
7.3	Anwendungsbeispiel . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Programmbeschreibung</b>	<b>82</b>
<b>B</b>	<b>Herleitung Beamforming</b>	<b>84</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>86</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>88</b>
	<b>Quellen</b>	<b>89</b>

# Abkürzungsverzeichnis

Die wesentlichen in dieser Masterarbeit verwendeten Abkürzungen und eine kurze Definition in alphabetischer Reihenfolge:

Symbol	Bedeutung
$b_{\perp}$	Rechtwinklige Basislinie
BF	Beamforming
CS	Compressive Sensing
$\delta$	Anzahl der möglichen Elevationen; Suchraum in Elevationsrichtung
$\delta_s$	Auflösung in Elevationsrichtung
$\Delta b_{\perp}$	Gesamtausdehnung der rechtwinkligen Basislinien
$f_p$	Ortsfrequenz. Abhängig von der Basislinie der jeweiligen Aufnahme p
$g_p$	Komplexes Signal der Auflösungszelle p
$\vec{g}$	Vektor der komplexen Signalwerte aller P Aufnahmen einer Szene
$\gamma_k$	Amplitude des Streuers k
$\vec{\gamma}$	Amplituden-Vektor der Dimension $[\delta \times 1]$ .
H	Designmatrix des nichtlinearen Anteils des funktionalen Zusammenhangs zwischen Beobachtungen und Parametern im NLSE-Ansatz
j	Imaginäre Einheit
K	Gesamtanzahl der Streuer in einer Auflösungszelle
k	Ein Streuer in einer Auflösungszelle
L	Wörterbuch. Enthält alle Kombinationen aus Basislinien und Elevationen
$\lambda$	Wellenlänge des Radarsignals
N	Gesamtanzahl der Auflösungszellen in einem Profil
n	Eine Auflösungszelle des Profils
NLSE	Nonlinear Least Squares Estimation
P	Gesamtanzahl der verfügbarer Aufnahmen im Stapel der gleichen Szene
p	Eine Aufnahme des Stapels
r	Rangerichtung im Tomographie-Koordinatensystem
$\bar{r}$	Mittlere Entfernung Radarsensor - Objekt
s	Elevationsrichtung im Tomographie-Koordinatensystem
$s_k$	Elevation des Streuers k
SNR	Signal to Noise Ratio, Signal-Rausch-Verhältnis
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition
$v_n$	Rauschanteil am Signal der Auflösungszelle n
$\vec{v}$	Vektor mit dem Rauschanteil des Signals jeder Aufnahme p
WSVD	Weighted Singular Value Decomposition
x	Azimutrichtung im Tomographie-Koordinatensystem

# Kapitel 1

## Einleitung

Hochauflösende Synthetic Aperture Radar-Sensoren (SAR-Sensoren) bieten die Möglichkeit, die Beschaffenheit der Erdoberfläche wetter- und sonnenlichtunabhängig zu erfassen. Dies stellt einen großen Vorteil gegenüber optischen Sensoren dar, die auf Sonnenlicht und eine wolkenlose Atmosphäre angewiesen sind. Damit flächenhafte Informationen mit SAR-Sensoren gewonnen werden können, muss die Szene schräg beleuchtet werden. Besonders in urbanen Gebieten mit hoher Bebauung führt diese Aufnahmegeometrie zu Überlappungs- und Verdeckungsproblematiken (Layover, Foreshortening). In einem SAR-Bildpixel können sich daher Signalanteile von mehreren Streuern wiederfinden. Die SAR-Tomographie (TomoSAR) versucht unter Zuhilfenahme mehrerer Aufnahmen der gleichen Szene diese Mehrdeutigkeiten aufzulösen.

Die SAR-Sensoren der neueren Generation, wie beispielsweise TerraSAR-X, bieten Bodenauflösungen von bis zu 1 m x 1 m. Dies eröffnet neue Anwendungsgebiete und Möglichkeiten für die Fernerkundung. Parallel mit der Entwicklung der SAR-Sensoren geht auch diejenige der Auswertetechniken einher. Mittels differentieller Interferometrie sind Bodenbewegungen in einer Geschwindigkeit von wenigen mm pro Jahr aufdeckbar. Durch die hohe Auflösung können Gebäudestrukturen klar identifiziert werden. Doch die hohe zweidimensionale Auflösung ist für viele Anwendungen nicht ausreichend. Die Herausforderung für hochauflösende SAR-Daten liegt in der Gewinnung von Informationen über die dritte Raumdimension.

### 1.1 Motivation: Die dritte Dimension

TomoSAR hat das theoretische Potential urbane Gebiete in drei Raumdimensionen zu erfassen. Stehen genügend SAR-Aufnahmen zur Verfügung, können auch zeitliche Variationen erfasst werden. Eine Vielzahl praktischer Anwendungen, die auch heute schon die Ergebnisse anderer SAR-Prozessierungen nutzen, sind beispielsweise: Untersützung bei der Entscheidungsfindung im Katastrophenmanagement, Detektion und Kartierung von Deformationen in Folge von Großbauprojekten, Detektion und Kartierung von Bodensenkungserscheinungen in Folge von Bergbau und anderen geologischen Veränderungen. TomoSAR ergänzt die Möglichkeiten der Persistent Scatterer (PS)-, Small Baseline Subsets Approach (SBAS)-, Interferometric SAR (InSAR)- und Differential InSAR-Techniken um die ansonsten nicht genutzten Informationen mehrerer Streuer in einer Auflösungszelle. Die in diesen Techniken

verwendeten Koordinaten „Azimut“ und „Range“ werden durch TomoSAR um die Koordinate „Elevation“ erweitert. Dadurch können die oben genannten Anwendungen zum einen validiert und präzisiert werden, zum anderen entstehen auch völlig neue Anwendungsmöglichkeiten, wie beispielsweise die Generierung von 3D-Stadtmodellen. Gefordert ist dabei auch eine gewisse Auflösungsfähigkeit in Elevationsrichtung. Dies führt zu der Suche nach sogenannten Super-Resolution-Algorithmen.

Für die gewinnbringende Nutzung der dritten Dimension in SAR-Bildern ist die Information aus einer einzelnen Auflösungszelle oft nicht ausreichend. Denn häufig liegt das Interesse in der flächenhaften Auswertung eines bestimmten Gebietes. Ein erster Schritt in diese Richtung stellt die Betrachtung von Elevations-Profilen statt einzelnen Auflösungszellen dar. Aus den Nachbarschaften können Informationen gewonnen werden, die für die Plausibilitätsbewertung der Elevationen genutzt werden können.

Auch bei der Synthese der Vorteile von optischen und Radarsensoren kann TomoSAR eine wichtige Rolle spielen. Höhenmodelle aus TomoSAR von urbanen Gebieten können mit Modellen aus optischen Sensoren verknüpft und gegenseitig überprüft werden. Hierbei ist unter anderem zu klären, ob die Positionen von dominanten Streuern in einer Auflösungszelle in optischen Schrägluftbildern wiedergefunden und zugeordnet werden können.

## 1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit

Der zentrale Aspekt dieser Masterarbeit ist die Betrachtung von Reflexionsprofilen. Diese sind die Amplitudenverläufe über die Elevationen. Aus Reflexionsprofilen können schließlich die Elevationen dominanter Streuer gewonnen werden. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Plausibilitätsbewertung. Diese wird auf zwei Arten definiert und bezieht sich immer auf die Plausibilität der Reflexionsprofile. Zunächst werden im Kapitel 2 die grundlegenden physikalischen Zusammenhänge zur Entstehung einer SAR-Aufnahme erklärt. Die für das Verständnis wichtigen Grundlagen des Zusammenhangs zwischen den SAR-Messungen und den Reflexionsprofilen in Elevationsrichtung werden hier dargestellt. Zudem werden die von TomoSAR zu lösenden Problemstellungen im Detail aufgezeigt. Verschiedene Ansätze für die Rückgewinnung des komplexwertigen Reflexionsprofils einer Auflösungszelle aus mehreren SAR-Aufnahmen einer Szene werden anschließend in Kapitel 3 vorgestellt und miteinander verglichen.

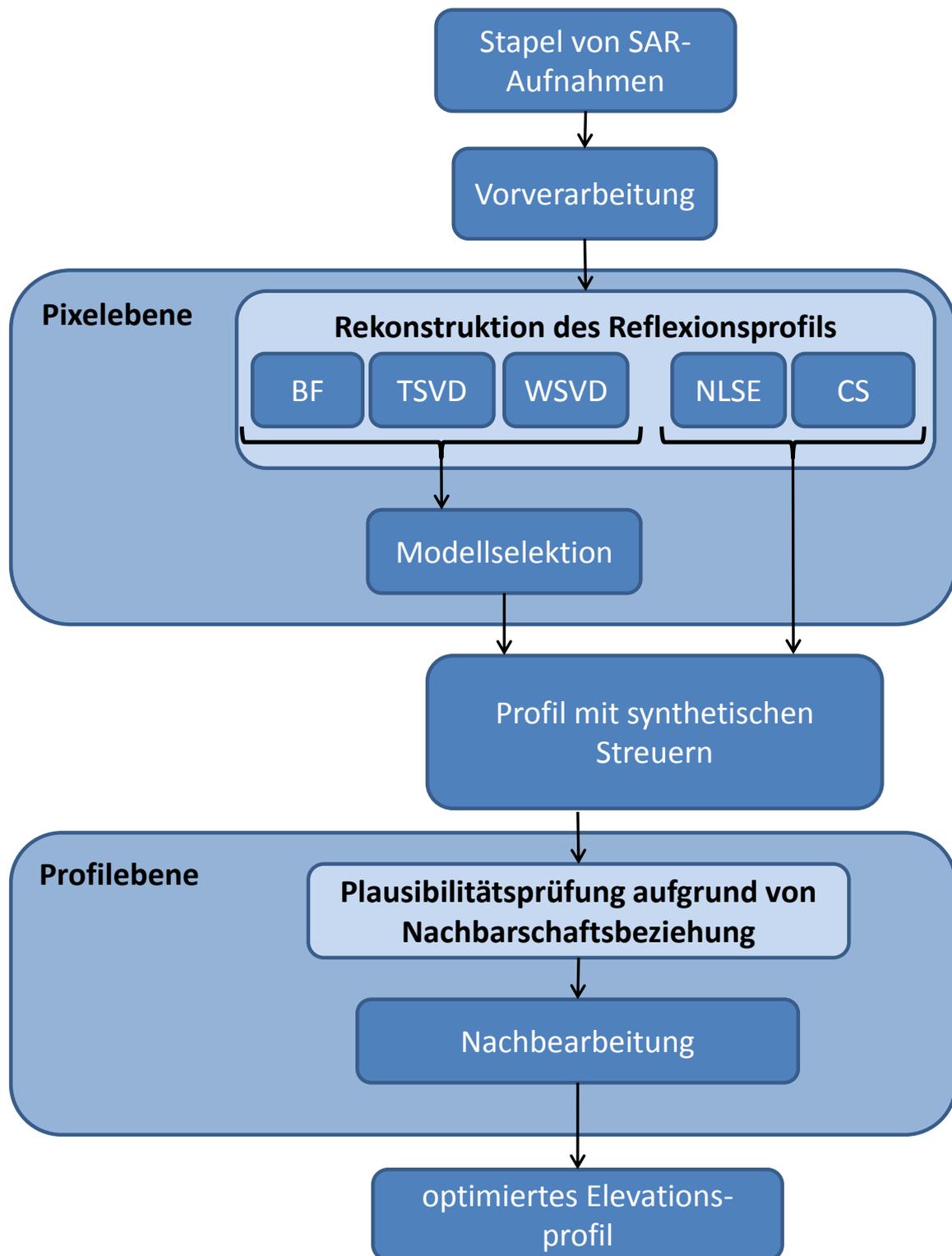
Liegt schließlich ein Reflexionsprofil vor, folgt die Validierung auf Pixelebene. Dabei wird apriori-Wissen in Form von der Annahme, dass sich nur eine begrenzte Menge von Streuern in einer Auflösungszelle befinden, eingeführt. Kapitel 4 zeigt, wie mit Methoden der Modellselektion dieses Vorwissen auf die rekonstruierten Reflexionsprofile angewendet werden kann. Anschließend wird in Kapitel 5 die Plausibilität der Rekonstruktionsergebnisse geprüft. Hierfür werden zunächst zwei Plausibilitätskriterien entwickelt. Das erste ist zur Quantisierung der Trennbarkeit mehrerer Streuer im Vergleich mehrerer Rekonstruktionsalgorithmen gedacht und benutzt als Bewertungsmaß die Approximationsgüte von Gauß-Kurven, die in das rekonstruierte Signal geschätzt werden. Das andere Plausibilitätsmaß nutzt Nachbarschaftsinformationen der lokalen Umgebung eines Streuers.

Es folgt das Kapitel 6 mit Ergebnissen der verschiedenen Inversionsansätze, Modellselektion und Plausibilitätsmaße. Die verschiedenen Inversionsansätze werden miteinander verglichen, wobei mittels synthetischer Daten gezeigt wird, wo die Auflösungsgrenzen der Rekonstruktionsalgorithmen liegen. Hier wird auch die Sensibilität der Rekonstruktionsalgorithmen auf

Größen untersucht, die die Auflösung bestimmen. Im zweiten Teil der Ergebnisse werden die Inversionsansätze auf reale Daten in Form von Profilen angewendet und verglichen.

Als Beispiel für die weitere Verwendung eines TomoSAR-Profil-Ergebnisses wird anschließend, in Kapitel 7, ein Ansatz für die Nachbearbeitung erläutert. Unter der Annahme, dass hauptsächlich Geraden von Interesse sind, wird hier das Streuer-Profil mehrerer Auflösungszellen durch lokale Geraden approximiert. Dies ist ein Ansatz für die Merkmals-Extraktion aus TomoSAR-Punktwolken. Abgeschlossen wird die Masterarbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Entwicklungsmöglichkeiten des TomoSAR. Hier wird besonders auf die vorgestellte Herangehensweise mittels Elevationsprofilen eingegangen.

Der Aufbau der Masterarbeit entspricht dem in Abbildung 1.1 dargestellten Ablauf der TomoSAR-Prozessierungskette. Zunächst wird auf Pixelebene gearbeitet bevor der Übergang auf die Profilebene erfolgt. Dies stellt auch den Aufbau des in der Programmiersprache „Interactive Data Language“ (IDL) geschriebenen Programms dar, welches im Rahmen dieser Masterarbeit entstanden ist. Im Anhang A befindet sich eine ausführliche Programmbeschreibung, die das Einarbeiten in den Code, zusammen mit den Kommentaren im Quelltext, erleichtern soll.



**Abb. 1.1:** Übersicht der TomoSAR-Prozessierungskette.

## Kapitel 2

# Grundlagen

In den Grundlagen sollen die grundlegenden Zusammenhänge, die zum Verständnis der in den folgenden Kapiteln vorgestellten Ansätze nötig sind, aufgezeigt werden.

### 2.1 TerrarSAR-X

SAR-Sensoren sind aktive und bildgebende Systeme zur Erfassung von Oberflächenstrukturen der Erde. Die Sensoren können auf verschiedenen Trägersystemen installiert sein. TomoSAR mit flugzeuggestützten Daten wurde beispielsweise erfolgreich von Reigber und Moreira am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) durchgeführt [23]. Die zweite große Gruppe von SAR-Sensoren sind satellitengestützt. In dieser Masterarbeit werden ausschließlich SAR-Daten vom TerraSAR-X-Satelliten verwendet. Satelliten bieten den Vorteil, dass sie sich über den Missionszeitraum dauerhaft im Orbit befinden und somit langfristige und zeitlich gleichabständige Zeitreihen liefern können.

TerraSAR-X wurde am 15. Juni 2007 in einen sonnensynchronen Orbit ( $97,44^\circ$  Inklination) transportiert. In einer Höhe von 514 km umfliegt TerraSAR-X  $15\frac{2}{11}$  mal pro Tag die Erde. Somit wird ein Punkt auf der Erdoberfläche alle 11 Tage neu überflogen. Für eine Zeitreihenanalyse können somit nur Daten mit einem Zeitintervall von minimal 11 Tagen akquiriert werden. Das Herzstück des Satelliten ist das SAR-Instrument. Es emittiert Radarsignale im X-Band auf einer Frequenz von 9,65 GHz mit einer maximalen Bandbreite von 300 MHz, was einer Wellenlänge von rund 3,1 cm entspricht. Die Antenne besteht aus 12 Panels mit je 32 Arrays, die sowohl senden als auch empfangen und hat eine Gesamtlänge von 4,8 m [8].

TerraSAR-X bietet drei Aufnahmemodi:

- *High-Resolution Spotlight Mode*
  - Bodenauflösung
    - in Azimutrichtung: 1,1 m
    - in Rangerichtung: 0,74 m - 1,77 m (Beleuchtungswinkel zwischen  $55^\circ$  -  $20^\circ$ )
  - abgedecktes Gebiet: 5 km  $\times$  10 km



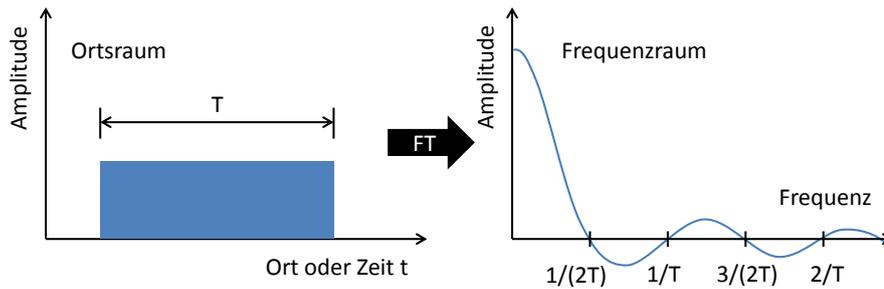
**Abb. 2.1:** Künstlerische Darstellung des Erdbeobachtungssatelliten TerraSAR-X. Quelle: DLR

- *StripMap Mode*  
 Bodenauflösung  
   in Azimutrichtung: 3,3 m  
   in Rangerichtung: 1,70 m - 3,49 m (Beleuchtungswinkel zwischen  $45^\circ$  -  $20^\circ$ )  
 abgedecktes Gebiet: kleiner als  $1500 \text{ km} \times 30 \text{ km}$
- *ScanSAR Mode*  
 Bodenauflösung  
   in Azimutrichtung: 18,5 m  
   in Rangerichtung: 1,70 m - 3,49 m (Beleuchtungswinkel zwischen  $45^\circ$  -  $20^\circ$ )  
 abgedecktes Gebiet: kleiner als  $1500 \text{ km} \times 100 \text{ km}$

Die in dieser Masterarbeit verwendeten Daten bestehen aus 20 „High-Resolution Spotlight Single Look Complex“-Aufnahmen vom Stadtgebiet Berlin aus dem Zeitraum Februar 2008 bis Januar 2009. Die Aufnahmen werden durch die zeitversetzte Abtastung im Sensor komplexwertig, sodass neben der Amplitude auch die Phaseninformation erhalten bleibt [25]. Die für die Elevationsauflösung erforderliche parallele Basislinie ist aufgrund der sehr präzisen Orbitsteuerung des Satelliten auf einen Bereich von ca. 500 m begrenzt [6] was eine begrenzende Größe für eine Gruppe von Ansätzen die Auflösungsmöglichkeit in Elevationsrichtung stark beschränkt.

## 2.2 Fouriertransformation

Ein grundlegendes mathematisches Konzept, welches in dieser Masterarbeit Anwendung findet, ist die Fouriertransformation (FT). Sie beschreibt den Übergang eines nicht periodischen kontinuierlichen Signals vom Ortsraum in den Frequenzraum. Dabei kann jedes Signal verlustfrei durch sein Spektrum ausgedrückt werden. Dies geschieht durch die Zerlegung des Signals in die Summe mehrerer Basisfunktionen einer orthonormalen Basis. Jean Baptiste Joseph Fourier zeigte schon 1822, dass die einzige Orthonormalbasis, deren Fehler bei der Approximation des



**Abb. 2.2:** Schema der Fouriertransformation.

Eingangssignals minimiert werden kann, die Kombination aus Sinus- und Kosinustermen ist [7]. Ein Signal kann also als Summe von Sinus- und Kosinustermen ohne Informationsverlust ausgedrückt werden. So ist beispielsweise die Entsprechung eines Rechteckpuls im Ortsraum eine Sinc-Kurve im Frequenzraum. Je nach Komplexität des Signals werden verschieden viele dieser Terme benötigt. Eine wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die Bandbreite des Signals im Ortsraum. Für ein Signal, das kontinuierlich über die Zeit gemessen wird, ist diese Bandbreite die gesamte Messdauer. Allgemein gilt für den Zusammenhang zwischen Signal  $h(x)$  und seinem Spektrum  $H(f)$  [7]:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j2\pi fx} dx \quad (2.1)$$

wobei  $f$  die Frequenzen im Spektrum beschreibt. Die Schreibweise  $e^{(\cdot)}$  in eulerscher Relation ermöglicht dabei die einfache Darstellung der Größen Amplitude und Phase. In der Praxis kann jedoch nicht über den in Gleichung (2.1) unendlich ausgedehnt dargestellten Orts- oder Zeitraum integriert werden. Ist dieser Raum beschränkt durch die Ausdehnung  $T$  so wirkt sich dies umgekehrt proportional abhängig von  $T$  auf das Spektrum im Frequenzraum aus. Ein breit ausgedehntes Signal im Ortsraum, gleichbedeutend mit einem großen  $T$ , besitzt ein fein aufgelöstes Spektrum im Frequenzraum [7]. Abbildung 2.2 zeigt diesen für die spätere Betrachtung wichtigen Zusammenhang. Die Auflösung im Spektrum ist also proportional zur Ausdehnung im Ortsraum:

$$\delta_s \propto \frac{1}{T} \quad (2.2)$$

In der Realität treten jedoch zwei Einschränkungen des Messprozesses auf. Zum einen kann ein Signal nicht beliebig lange beobachtet werden und zum anderen kann nicht kontinuierlich sondern nur an diskreten Stellen beobachtet werden. Dies führt zu einem diskreten Eingangssignal welches als Abtastung des eigentlichen, kontinuierlichen Signals mit Dirac-Stößen veranschaulicht werden kann. Es sind also nur an einigen Stellen des kontinuierlichen Signals Daten vorhanden. Durch die Abtastung des Signals wird das dazugehörige Spektrum periodisch fortgesetzt. Dies geschieht mit der Abtastfrequenz  $f = \frac{1}{\Delta x}$ . Der Abstand der Abtaststellen  $\Delta x$  legt fest, welches die höchste rekonstruierbare Frequenz ist. Wird das Signal an weniger Stellen abgetastet, kommt es im Frequenzspektrum zu Scheinfrequenzen, die zu einer fehlerhaften Interpretation führen. Dieser Effekt wird Aliasing genannt. Die Abtastfrequenz  $f_N$ , bei der

eine Frequenz  $f_A$  noch rekonstruierbar ist, wird Nyquistfrequenz genannt und ist doppelt so hoch wie die höchste aufdeckbare Frequenz [7]:

$$f_N = \frac{1}{2}f_A = \frac{1}{2\Delta x} \quad (2.3)$$

Hierbei wird von gleichabständigen Abtaststellen ausgegangen. Die Anordnung der Abtaststellen hat auch einen großen Einfluss auf die Rauschübertragung vom Orts- in den Frequenzraum [26]. Sind die Messungen aller Messstellen gleichgenau, aber deren Orte nicht gleichverteilt, so kommt es im Frequenzraum zu ungünstigem Rauschverhalten. Die Frequenz-Amplitudenpaare können dann nicht mehr mit der gleichen Genauigkeit aufgelöst werden wie im gleichabgetasteten Fall. Der Einfluss dieses Effektes auf TomoSAR wird in Kapitel 6.1.5 näher untersucht.

Wie in Kapitel 2.3 hergeleitet wird, ist das Reflexionsprofil einer Auflösungszelle in Elevationsrichtung das Amplitudenspektrum des gemessenen Signals. Daher können die beschriebenen Methoden der Fouriertransformation auf TomoSAR angewandt werden. Die Bandbreite  $T$  ist dann durch die Ausdehnung der rechtwinkligen Basislinien der Satellitenpositionen gegeben. Eine breite Gesamtbasislinie ermöglicht, analog zu einem großen  $T$ , eine feine Auflösung der Elevation.

## 2.3 Radarsignal

Der Radarsatellit sendet zu einem Zeitpunkt ein gerichtetes Signal aus, welches sich wellenförmig ausbreitet. Die Objekte auf der Erdoberfläche streuen den größten Teil der eingetroffenen Energie wieder zurück. Das zurückgestreute Signal wird vom Satelliten über die selbe Antenne empfangen und verarbeitet. Dabei findet eine Projektion der beleuchteten Objekte in ein Bildkoordinatensystem statt. Dieses Koordinatensystem ist in den Abbildungen 2.3 sowie 2.4 dargestellt und wie folgt definiert:

- **Azimet**  
Die Azimutrichtung fällt mit der Flugrichtung des Satelliten zusammen. Obwohl die Bahn des Satelliten in erster Näherung ellipsenförmig verläuft, kann für den Bereich, der zur Generierung des SAR-Bildes überflogen wird, eine Gerade angenommen werden [13].
- **Range**  
Die Koordinatenachse in Rangerichtung steht senkrecht auf der Azimutachse und zeigt in Richtung des beleuchteten Objekts. Weiter vom Sensor entfernte Objekte haben eine größere Range-Koordinate.
- **Elevation**  
Die Elevationsachse komplettiert das rechtwinklige Koordinatensystem. In einer Aufnahme ist diese Koordinate nicht aufzulösen, da in der zweidimensionalen Projektion über alle Elevationen integriert wird.

Um eine hohe Auflösung in Range zu erreichen, müsste ein möglichst kurzer Impuls gesendet werden. Denn alle Objekte, die während dieser Pulsdauer beleuchtet werden, fallen in eine Auflösungszelle. Da das Signal jedoch nicht beliebig kurz gepulst werden kann, wird ein linear modulierte, breitbandiges Chirpsignal als Radarsignal verwendet und beim Empfang wieder fokussiert. Dies erlaubt eine hohe Bandbreite und somit eine hohe Signalenergie bei einer

dennoch hohen Rangeauflösung. Eine ausführliche Einführung in die SAR-Bildprozessierung bietet [13]. Auf die Bilderzeugung in Rangerichtung wird hier nicht weiter eingegangen.

Die hohe Auflösung in Azimutrichtung wird mit Hilfe der Synthetisierung einer langen Antenne durch die kohärente Beleuchtung der Szene mittels einer kleinen realen Antenne der Länge  $l$  erreicht. Die Azimutauflösung  $\delta_{Az}$  einer Aufnahme zu einem Zeitpunkt ist durch die Winkelauflösung des sich ausbreitenden Signals begrenzt und entspricht der Azimutauflösung im Falle einer realen Apertur (RAR):

$$\delta_{Az,RAR} = \frac{\bar{r}\lambda}{l} \quad (2.4)$$

$\lambda$  ist dabei die verwendete Wellenlänge und  $\bar{r}$  die Schrägentfernung zwischen Objekt und Sensor. Durch die Synthetisierung aller Aufnahmen, die gemacht werden, während sich das Objekt innerhalb des Öffnungskegels  $\delta_{Az,RAR}$  befindet, ist es möglich, die Azimutauflösung auf

$$\delta_{Az,SAR} = \frac{l}{2} \quad (2.5)$$

zu verringern. Die resultierende synthetische Antenne hat die Länge des Bereichs, der durch die realen Antenne in Azimutrichtung beleuchtet wird (engl.: „Footprint“). Somit nimmt die Azimutauflösung mit einer kleineren realen Antenne zu. Die dahinterstehende Prozessierung wird detailliert in [13] beschrieben.

Der Ansatz, eine große Basis für die Erhöhung der Auflösung zu nutzen, wird auch im Fall der dritten Auflösungsgröße, der Elevation, genutzt. Dies ist der Teil der SAR-Prozessierung, mit dem sich diese Masterarbeit hauptsächlich befasst. Was die synthetisierte lange Antenne für die Auflösung in Azimutrichtung ist, ist die Gesamtausdehnung der rechtwinkligen Basislinien  $\Delta b_{\perp}$  für die Auflösung in Elevationsrichtung. Die Ausdehnung der verschiedenen Aufnahmen  $\Delta b_{\perp}$  ist jedoch wesentlich geringer als die Ausdehnung der synthetisierten Antenne in Azimutrichtung. Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, ist der Schlauch, in dem TerraSAR-X bei wiederholten Flügen über das selbe Gebiet geführt wird, auf wenige hundert Meter beschränkt. Für einen typischen TerraSAR-X-Anwendungsfall würde die entsprechende Elevationsauflösung  $\delta_s$  nach [30]

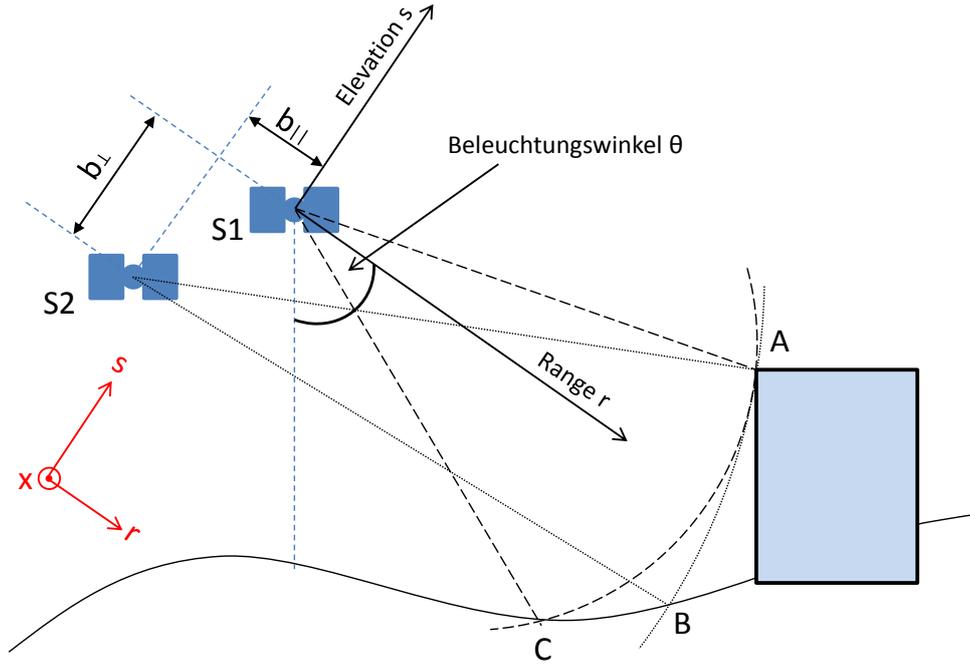
$$\delta_s = \frac{\lambda\bar{r}}{2\Delta b_{\perp}} = \frac{0,031m \cdot 600 km}{2 \cdot 300 m} = 31 m \quad (2.6)$$

betragen (Herleitung siehe unten). Dies entspricht bei einem von TerraSAR-X häufig verwendeten Beleuchtungswinkel von  $\theta = 30^\circ$  einer Höhenauflösung von

$$\delta_h = \delta_s \cdot \sin(\theta) = 15,5 m \quad (2.7)$$

In Kapitel 5 wird die Elevationsauflösung benutzt, um eine Plausibilitätsprüfung der rekonstruierten Reflexionsprofile durchzuführen.

Abbildung 2.3 zeigt schematisch die Aufnahmegeometrie für eine Szene zu zwei Überflugzeitpunkten. In einer Auflösungszelle einer einzelnen Aufnahme fällt das zurückgestreute Signal aller Streuer des Gebietes der Szene, die gleichweit vom Sensor entfernt sind, zusammen. Für den Satelliten S1 sind beispielsweise die Punkte A und C gleichweit entfernt und werden daher in dieselbe Auflösungszelle projiziert. Der Bodenpunkt C sowie der Punkt A am Gebäude



**Abb. 2.3:** Schema der Aufnahmegeometrie für eine Szene zu zwei Überflugzeitpunkten. Koordinatenrichtung Azimut in Blattenebene, Basislinie  $b_{\perp}$  rechtwinklig zu Azimutrichtung.

werden zusammen abgebildet, das Signal wird vermischt. Diese Überlagerung von Signalanteilen und die entsprechende Abbildung im SAR-Amplitudenbild wird „Layover“ genannt. Die Aufnahme von S2 hingegen bildet, wegen der etwas anderen Aufnahmegeometrie, Gebäudepunkt A zusammen mit Bodenkpunkt B in eine Auflösungszelle ab. Die parallele Basislinie  $b_{\parallel}$  verläuft in Richtung der Rangekoordinate. Die rechtwinklige Basislinie  $b_{\perp}$  steht orthogonal zu den Satelliten-Flugbahnen, die näherungsweise als parallel angenommen werden.

Die mathematisch-physikalische Beschreibung dieser Aufnahmegeometrie wird in [27], [11], [12] oder [9] hergeleitet und soll hier nur kurz dargestellt werden:  $P$  ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Aufnahmen derselben Szene. Die zu den  $P$  Aufnahmen gehörigen Orbits seien parallel. Alle Aufnahmen sind georeferenziert auf eine gemeinsame Aufnahme, genannt „Master“, bezogen. Das bedeutet zum einen, dass dasselbe Objekt in dieselbe Auflösungszelle für alle Bilder des Stapels abgebildet wird und zum anderen, dass sich die Basislinien auf die Sensorposition der Masteraufnahme beziehen. Die Bornsche Näherung beschreibt die Streuung von elektromagnetischen Wellen, deren Energie hoch ist im Verhältnis zum Streupotential. Mit dieser Näherung ist das in eine Auflösungszelle abgebildete 2D-Signal des Objekts an den Koordinaten (Azimut, Range) =  $(x', r')$  gegeben durch:

$$\gamma_p(x', r') = \int_x \int_r dx dr f(x' - x, r' - r) \int ds \gamma(x, r, s) \cdot e^{(-j \frac{4\pi}{\lambda} R_p(r, s))}, p = 1, \dots, P \quad (2.8)$$

wobei  $R_p(r, s)$  den Abstand zwischen Sensor und fokussiertem Objekt beschreibt:

$$R_p(r, s) = \sqrt{(r - b_{\parallel,p})^2 + (s - b_{\perp,p})^2} \approx r - b_{\parallel,p} + \frac{(s - b_{\perp,p})^2}{2(r - b_{\parallel,p})} \quad (2.9)$$

Die Näherung ist die Erweiterung des binomischen Lehrsatzes mittels einer unendlichen Reihe auf rationale und komplexe Zahlen durch Isaac Newton, welche nach dem zweiten Term abgebrochen wird:

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \quad (2.10)$$

$f(\cdot)$  in Gleichung (2.8) beschreibt die zweidimensionale Punktantwort des zurückgeworfenen Signals eines Objekts:

$$f(x', r') = \text{sinc}\left(\frac{r'}{\delta r}\right) \text{sinc}\left(\frac{x'}{\delta_x}\right) \quad (2.11)$$

wobei  $\delta_x$  und  $\delta r$  die bekannten Auflösungen in Azimut und Range darstellen.

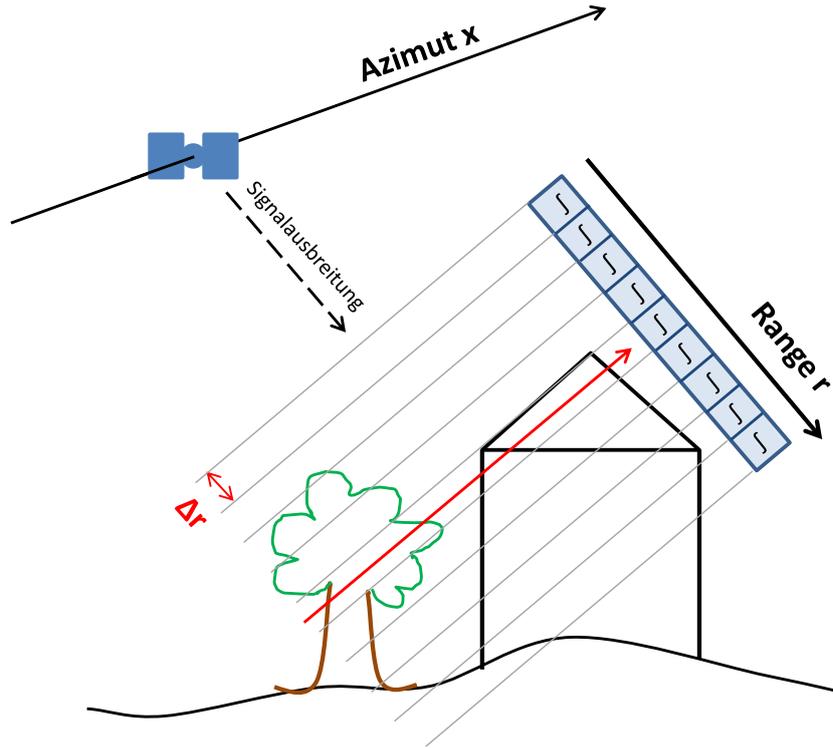
$\gamma(x, r, s)$  gibt die Amplitude des Signals wieder, die stark von den Eigenschaften des dreidimensionalen Objekts abhängig ist. Gleichung (2.8) zeigt, dass eine Projektion vom dreidimensionalen Raum (Koordinaten: Azimut  $x$ , Range  $r$  und Elevation  $s$ ) in den zweidimensionalen Raum stattfindet. Dabei werden die Signalanteile, die in den Bereich einer Auflösungszelle fallen, aufintegriert.

Die Abbildungsgeometrie entspricht einer Zylinderprojektion, wobei die Gerade durch den Zylinder mit der Flugachse zusammenfällt. Die Rangerichtung entspricht dem Radius. Die Elevation kann in einer Aufnahme nicht aufgelöst werden (daher Projektion aus dem  $\mathbb{R}^3$  in den  $\mathbb{R}^2$ ). Die Abbildungsgeometrie ist paralleltreue, da die Azimutrichtung parallel zur Flugrichtung ist. In Rangerichtung wird ebenfalls linear abgebildet. Je nach Abtastung, kann ein SAR-Amplitudenbild in Azimut- und Rangerichtung verschiedene Auflösungen enthalten, jedoch ändert dies nichts an der Paralleltreue. Diese Paralleltreue bzw. Geradentreue ist eine wichtige Eigenschaft, die in Kapitel 5 unter Hinzunahme von Nachbarschaftsinformationen genutzt wird. Abbildung 2.4 zeigt diesen Teil der Aufnahmegeometrie schematisch. Für eine Azimutposition  $x$  wird durch die Schrägbeleuchtung eine Bildzeile erzeugt, die in jeder Auflösungszelle das Integral aller Signalanteile in Elevationsrichtung enthält.

Unter der Annahme, dass nur ideale Punktstreuer beobachtet werden, kann die zweidimensionale Sinc-Funktion in (2.11) durch einen zweidimensionalen Dirac-Stoß approximiert werden [12]. Somit vereinfacht sich das gesamte Problem auf ein eindimensionales Schätzproblem. Die verbleibende Dimension ist die Elevation  $s$  und Gleichung (2.8) wird zu:

$$h_p = \int \gamma(s) e^{-j \frac{4\pi}{\lambda} R_p(s)} ds \quad (2.12)$$

Gleichung (2.9) zeigt, dass der Phasenfaktor  $R_p(s)$  von der Range-Koordinate abhängig ist. Das gemessene Signal ist also mit einem von der Range-Koordinate abhängigen Term moduliert. Um diesen Einfluss auszugleichen, wird das Signal mit dem Phasenanteil des Punktes



**Abb. 2.4:** Schema der Aufnahmegeometrie für eine Szene zu einem Aufnahmezeitpunkt.

multipliziert, der die Elevation  $s = 0$  hat [10]. Diese Reduktion wird „deramping“ genannt und liefert:

$$\begin{aligned}
 g_p &= \int \gamma(s) \exp \left( -j \frac{4\pi}{\lambda} (R_p(s) - R_p(0)) \right) ds \\
 &= \int \gamma(s) \exp \left( -j \frac{4\pi}{\lambda} \left( \left[ r - b_{\parallel,p} + \frac{(s - b_{\perp,p})^2}{2(r - b_{\parallel,p})} \right] - \left[ r - b_{\parallel,p} + \frac{(-b_{\perp,p})^2}{2(r - b_{\parallel,p})} \right] \right) \right) ds \\
 &= \int \gamma(s) \exp \left( -j \frac{4\pi}{\lambda} \left[ \frac{s^2 - 2sb_{\perp,p}}{2(r - b_{\parallel,p})} \right] \right) ds \\
 &= \int \gamma(s) \exp \left( -j \frac{4\pi}{\lambda} \left[ \frac{s^2}{2(r - b_{\parallel,p})} \right] \right) \cdot \exp \left( +j \frac{4\pi}{\lambda} \left[ \frac{sb_{\perp,p}}{(r - b_{\parallel,p})} \right] \right) ds \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Für den in eine Auflösungszelle abgebildeten Objektraum sind bei einer vorab durchgeführten Georeferenzierung lediglich die Elevationen der Streuer unbekannt. Das wesentliche Interesse besteht außerdem nur an wenigen dominanten Streuern, sodass sich die Suche auf wenige Elevationen pro Auflösungszelle reduziert. Da die abgebildete Topographie und die Bebauung nicht beliebig in der Höhe ausgedehnt ist, kann der Suchraum in Elevationsrichtung zwischen  $-a$  und  $a$  eingegrenzt werden. Der von  $s^2$  abhängige Phasenterm in (2.13) beeinträchtigt nur die Phase, nicht jedoch die Amplitude. Die Elevation mit der größten Amplitude ist diejenige Elevation, die einem starken Streuer zugeordnet ist. Für TomoSAR-Zwecke kann dieser Term daher vernachlässigt werden. Außerdem ist die parallele Basislinie im Verhältnis zu  $\bar{r}$  so

klein, dass sie ebenfalls vernachlässigt werden kann [12]. Somit ist das Reflexionsprofil einer Auflösungszelle vereinfacht beschrieben durch:

$$g_p = \int_{-a}^a \gamma(s) e^{j2\pi f_p s} ds \quad (2.14)$$

Die Ortsfrequenz  $f_p$  ist abhängig von der rechtwinkligen Basislinie sowie der Wellenlänge und der mittleren Entfernung des Sensors zum Objekt:

$$f_p = \frac{2b_{\perp}}{\lambda \bar{r}} \quad (2.15)$$

Vergleicht man die Gleichungen (2.1) und (2.14), zeigt sich, dass  $\gamma$  die Fouriertransformation der im Signal vorhandenen Amplituden an den Stellen  $f_p = \frac{2b_{\perp}}{\lambda \bar{r}}$  ist. **Das Tomographie-Problem ist also die Suche nach dem Amplitudenspektrum über die Elevationen.**

Nimmt man  $K$  Streuer in einer Auflösungszelle  $n$  an und betrachtet die Projektion als rauschbehafteten Messprozess, kann das Signal diskret ausgedrückt werden als:

$$g_p = \sum_{k=1}^K \gamma_k e^{j2\pi f_p s_k} + v_p \quad p = 1, \dots, P \quad (2.16)$$

mit:  $\gamma_k$  komplexe Amplitude des Streuers  $k$   
 $s_k$  Elevation des Streuers  $k$   
 $P$  Anzahl verfügbarer Aufnahmen der gleichen Szene  
 $v_p$  Rauschanteil

Das Reflexionsprofil eines Streuers ist also abhängig von seiner Elevation, der Basislinienkonfiguration, der verwendeten Wellenlänge sowie der Entfernung zwischen Sensor und Objekt. Das Reflexionsprofil ist das Amplitudenspektrum des Signals, von dem man an  $P$  Stellen Messungen durchgeführt hat.

## 2.4 Vorverarbeitung

Bevor die komplexen Bilddaten verwendet werden können, muss das Signal um den Einfluss der Atmosphäre reduziert werden. Aufgrund der ungleichmäßigen Verteilung des Wasserdampfgehaltes in der Atmosphäre wird die Phase des Signals unterschiedlich beeinflusst [10]. Der Anteil der Atmosphäre überlagert den Anteil der Streuer und ist räumlich tieffrequent. Das bedeutet, dass sich der Einfluss der Atmosphäre zwischen zwei benachbarten Pixeln weniger unterscheidet als bei zwei weiter entfernten Pixeln. Zeitlich hingegen ist dieser Anteil hochfrequent, sodass die Atmosphäre für jede der  $P$  Aufnahmen getrennt entfernt werden muss. Dies geschieht mittels der Generierung von Interferogrammen. Alle Aufnahmen werden durch Differenzbildung auf einen gemeinsamen Master bezogen. Für das komplexe Signal entspricht das einer Multiplikation mit der komplex konjugierten Phase. Die Differenzphase  $\Phi_D$  ist die Differenz aus Slavephase  $\Phi_S$  und Masterphase  $\Phi_M$ :

$$\Phi_D = \Phi_S - \Phi_M \quad (2.17)$$

Die Differenzphase enthält nun, vereinfacht dargestellt, die folgenden Anteile: [25, 10]:

$$\Phi_D = \Phi_A + \Phi_b + \Phi_{Topo} + \Phi_{def} + \Phi_r \quad (2.18)$$

mit:	$\Phi_A$	konstante und lineare Anteile der Atmosphäre und des Orbits
	$\Phi_b$	Anteile der unterschiedlichen Blickrichtung
	$\Phi_{Topo}$	Anteile der Topographie
	$\Phi_{def}$	Anteile der Streuerbewegung zwischen den beiden Aufnahmezeitpunkten
	$\Phi_r$	nichtlineare Anteile der Atmosphäre, zeitliche Dekorrelation, Rauschen

Unter Zuhilfenahme der genauen Sensorpositionen und eines digitalen Höhenmodells (DHM) können die Anteile, die aufgrund der verschiedenen Positionen der beiden Aufnahmen entstehen sowie derjenige der Topographie berechnet werden. Die restlichen Anteile unterscheiden sich in ihrem räumlichen sowie zeitlichen Autokorrelationsverhalten. So ist beispielsweise der Term der Deformation sowohl zeitlich als auch räumlich korreliert, während der Beitrag der Atmosphäre und der Orbitpositionen nur räumlich, jedoch nicht zeitlich korreliert ist. Durch Ausnutzung dieser Unterschiede kann der gemeinsame Term der Atmosphäre und des Orbitfehlers für jede Aufnahme geschätzt und vom Signal abgezogen werden. Die Einflüsse der Atmosphäre und des Orbitfehlers können nicht getrennt werden. Für die folgende TomoSAR-Prozessierung wird das Signal als von Atmosphären- und Orbiteinflüssen bereinigt angenommen.

## 2.5 Punktauswahl

Die von Atmosphären- und Orbiteinflüssen bereinigten SAR-Bilder werden nun auf geeignete Auflösungszellen für die Durchführung von TomoSAR hin untersucht. Wie bei vielen SAR-Techniken, die mehr als einen Aufnahmezeitpunkt der gleichen Szene verwenden, ist auch bei TomoSAR die zeitliche Stabilität von Reflektoren eine wichtige Grundvoraussetzung. Stabil bedeutet, dass die Phase über die Zeit nahezu konstant bleibt. Nicht jedes Objekt, das das eintreffende Signal streut oder reflektiert, erfüllt diese Forderung. Drei wesentliche Arten von Signalanteilen können unterschieden werden [29]:

1. Schwache, diffuse Streuung von rauen Oberflächen. In urbanen Gebieten sind dies zumeist Straßenflächen oder Häuserwände und -dächer.
2. Starke Anteile von dominanten Streuern. Metallische Oberflächen streuen wesentlich stärker als die Objekte der Umgebung, genannt Clutter. An dieser Art von Streuern ist man hauptsächlich interessiert.
3. Anteile von voluminösen Streuern, wie beispielsweise Vegetation, die aufgrund ihrer zeitlichen Veränderung wie Störgrößen wirken.

Das gemessene Signal einer Auflösungszelle ist die Summe von beliebig vielen Streuern dieser drei Arten. Nur Signalanteile von Objekten der zweiten Art haben die geforderte zeitlich stabile Streueigenschaft. Abbildung 2.5 zeigt schematisch das Signal zweier Auflösungszellen in der komplexen Zahlenebene. Die Signalanteile der einzelnen Streuer sind als graue Vektoren dargestellt. Das Summensignal, hier schwarz dargestellt, hat eine geringe Amplitude („kurzer Vektor“). Anders verhält es sich in einer zweiten Auflösungszelle (hellrot). Auch hier gibt es viele zufällig verteilte Streuer jedoch auch einen mit einer wesentlich größeren Amplitude

als die der restlichen Streuer. Somit ist auch das Summensignal hauptsächlich von diesem dominanten Streuer definiert.

Betrachtet man nun den gesamten Aufnahmestapel und verfolgt die Streueigenschaft dieser dominanten Streuer, so können beständige Streuer, Persistent Scatterer genannt, detektiert werden. Diese behalten die im Verhältnis zu den anderen Streuern deutlich größere Amplitude über den gesamten Zeitraum des Aufnahmestapels bei. Somit bleibt auch die Phase  $\Phi$  nahezu konstant. Sämtliche in dieser Masterarbeit vorgestellten Verfahren zur Auflösung mehrerer Streuer in einer Auflösungszelle beruhen auf der Annahme, dass es sich um solche dominanten Streuer handelt. Daher ist es zunächst nötig, eine Auswahl der verwendeten Auflösungszellen zu treffen.

Ein Ansatz hierfür ist die Nutzung des Verhältnisses aus Gesamtamplitude zu Phasenstandardabweichung. Da die Phase jedoch nur aufsummiert über alle Streuer der Auflösungszelle vorliegt, muss eine Approximation dafür gefunden werden. Alessandro Ferretti zeigt in [10], dass sich für die Phasenstandardabweichung bis zu einem bestimmten Wert auch die Amplitudenstandardabweichung nutzen lässt. Als Stabilitätswert einer Auflösungszelle kann daher die Amplitudendispersion (engl.: „Dispersion index of amplitude“, DA) berechnet werden. Sie ist der Quotient aus Amplitudenstandardabweichung und Mittelwert der Amplitude über den gesamten Aufnahmestapel:

$$DA = \frac{\sigma_A}{m_A} \quad (2.19)$$

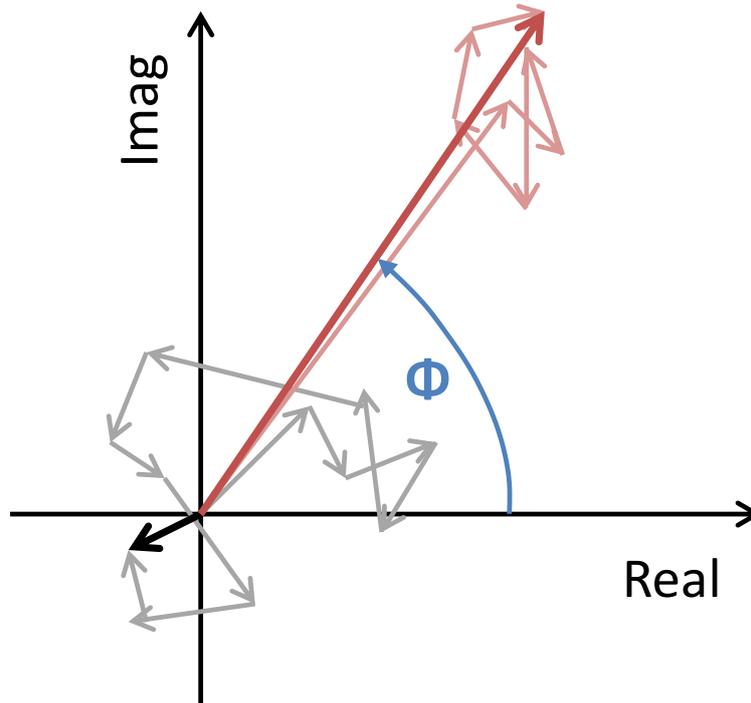
Die Amplitudendispersion DA ist laut [10] bis zu einem Wert von etwa 0,25 ein gutes Maß für die zeitliche Stabilität, wenn ein hohes Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) vorliegt. Im Rahmen dieser Masterarbeit werden jedoch auch Pixel mit einem DA-Wert bis 0,35 genutzt, da teilweise mehr Punkte nötig sind, auch wenn sie mit einer größeren Ungenauigkeit behaftet sind. Neben der generellen Punktstabilität ist auch der in Kapitel 3.4 vorgestellte Compressive-Sensing-Ansatz abhängig von der Phasenstabilität. Auch hier wird die Amplitudendispersion als Näherungswert genutzt.

## 2.6 Inversionsproblem

Die grundlegende Aufgabe der SAR-Tomographie besteht in der Inversion der in Kapitel 2.3 beschriebenen Abbildung mehrerer Streuer in eine Auflösungszelle. Als Eingangsdaten steht ein Stapel mit  $P$  komplexwertigen und atmosphärenbereinigten Aufnahmen derselben Szene zur Verfügung. Alle Aufnahmen sind bereits georeferenziert. Somit entsprechen alle Pixel einer Bildkoordinate der Abbildung desselben Objekts für alle Aufnahmen. Die rechtwinkligen Basislinien  $b_{\perp}$  zwischen den einzelnen Sensorpositionen sind bekannt. Die Anzahl der Streuer ist im Realbildfall unbekannt, sodass der Suchbereich entweder durch apriori-Annahmen über die Anzahl eingeschränkt oder eine Modellselektion durchgeführt werden muss (siehe Kapitel 4). Das inverse Problem von Gleichung (2.16) lässt sich auch ausdrücken durch

$$\vec{g} = L\vec{\gamma} \quad (2.20)$$

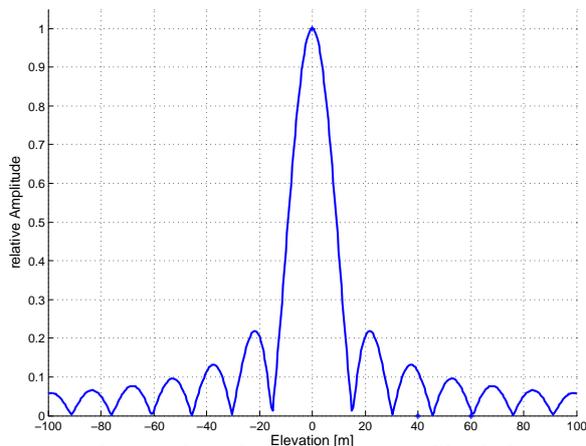
wobei  $\vec{\gamma}$  den Amplitudenvektor aller Streuer einer Auflösungszelle und  $\vec{g}$  den Vektor mit  $P$  gemessenen komplexen Werten darstellt.  $L$  ist das sogenannte „Wörterbuch“ und hat die Dimension  $[P \times \delta]$ .  $\delta$  beschreibt die Anzahl der möglichen Elevationen. Für einen Suchbereich



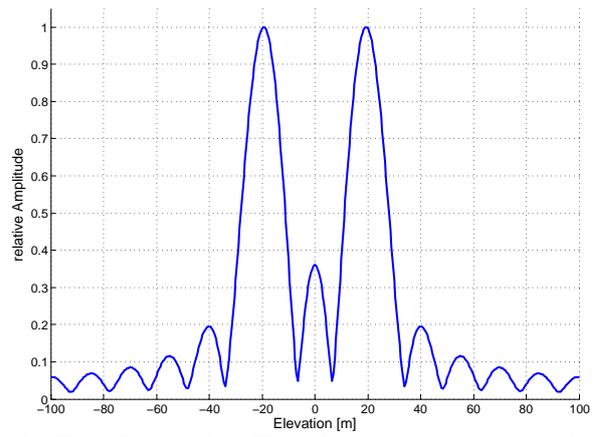
**Abb. 2.5:** Schema für Signalanteile zweier Auflösungszellen. Länge des Vektors entspricht Amplitude. In Anlehnung an [25]

von  $-100\text{ m} < a < +100\text{ m}$  ( $a$ : vgl. Gleichung (2.14)) und einem Suchraster von  $0,5\text{ m}$  wäre beispielsweise  $\delta = 401$ .  $\delta$  ist somit die Diskretisierung in Elevationsrichtung.  $\vec{\gamma}$  enthält im Idealfall nur an den Stellen, an denen sich ein Streuer befindet einen von 0 verschiedenen Eintrag. Das Wörterbuch  $L$  (in der englischen Literatur oft „dictionary“ genannt) enthält alle Kombinationen aus  $P$  Basislinien und  $\delta$  Elevationen. Auf den genaueren Aufbau von  $L$  wird in Kapitel 3.1 eingegangen. Aufgabe der Inversionsalgorithmen ist es, aus den Beobachtungen  $\vec{g}$  das Reflexionsprofil  $\vec{\gamma}$  zu rekonstruieren. Die Begriffe „Inversions-“ und „Rekonstruktionsalgorithmus“ bzw. „Invertierung“ und „Rekonstruktion“ werden analog verwendet.

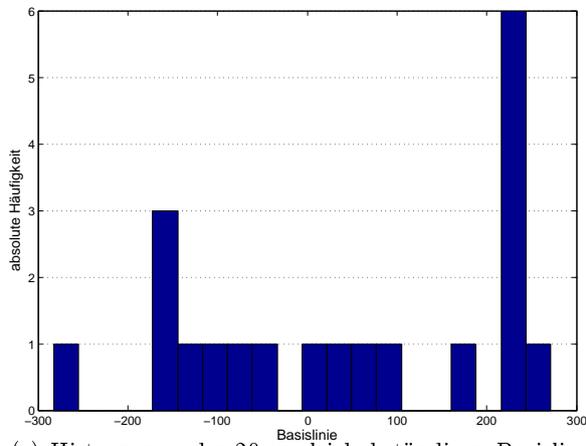
Das Reflexionsprofil eines Punktstreuers bei gleichmäßiger Basislinienverteilung ist eine Sinc-Funktion. Wäre die Ausdehnung dieser Basislinie unendlich lang, entspräche dies einer unendlich langen Bandbreite im Ortsraum und somit einem Dirac-Impuls im Frequenzraum. Da diese Basislinienausdehnung jedoch begrenzt ist, ergibt sich eine ausgedehnte Sinc-Funktion als Reflexionsprofil eines Punktstreuers. Das folgende Beispiel dient der Illustration der Zusammenhangs zwischen Orts- und Frequenzraum bei TomoSAR. Abbildung 2.6 zeigt die Abhängigkeit des Reflexionsprofils von der Basislinienkonfiguration sowie der Anzahl der Streuer. Die Reflexionsfunktionen wurden mittels Beamforming berechnet, welches in Kapitel 3.1 erklärt wird. Die Auflösungszelle des Reflexionsprofils in Abbildung 2.6(a) beinhaltet einen Streuer mit der Elevation  $s = 0\text{ m}$ . Es ist kein Rauschen hinzugefügt worden. Die 20 Basislinien sind gleichabständig in einem  $30\text{ m}$ -Intervall zwischen  $-285\text{ m}$ , und  $+285\text{ m}$ . Wie erwartet ist das Reflexionsprofil eine um den Streuer herum symmetrische Sinc-Kurve. Die Breite ist ein Maß für die Auflösungsfähigkeit des Rekonstruktionsalgorithmus. Auf diesen Aspekt wird in Kapitel 5 eingegangen. Abbildung 2.6(b) zeigt das Reflexionsprofil zweier Streuer mit den Ele-



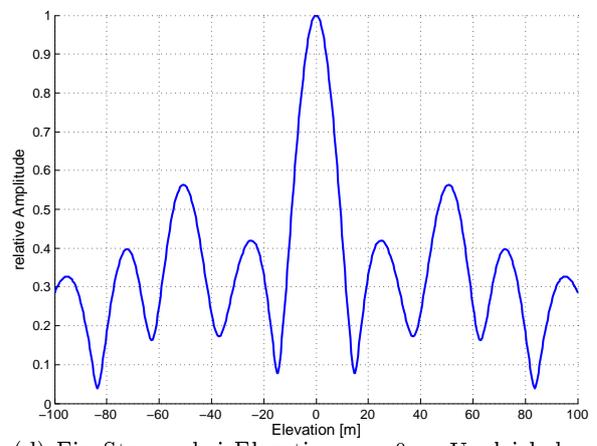
(a) Ein Streuer bei Elevation  $s = 0$  m. Gleichabständige Basislinien.



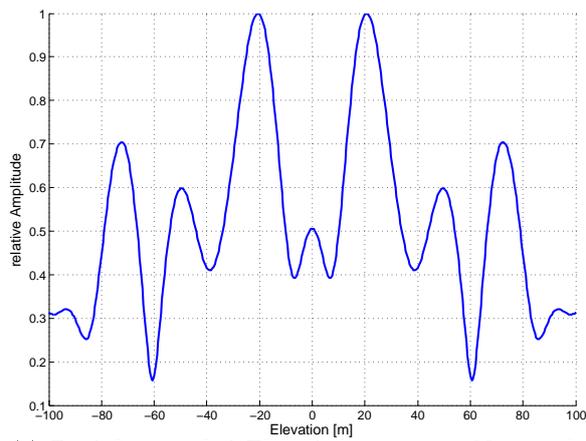
(b) Zwei Streuer bei Elevationen  $s_1 = -20$  m und  $s_2 = +20$  m. Gleichabständige Basislinien.



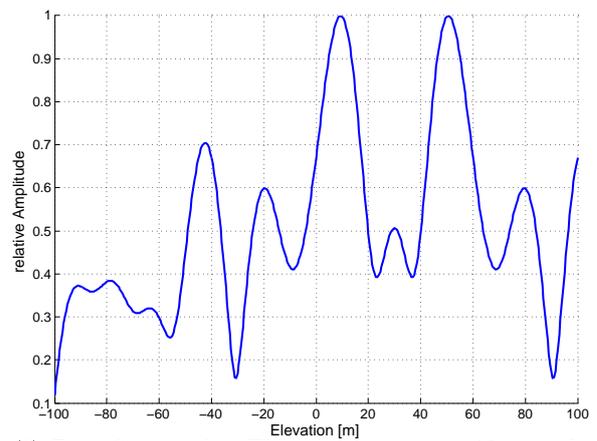
(c) Histogramm der 20 ungleichabständigen Basislinien.



(d) Ein Streuer bei Elevation  $s = 0$  m. Ungleichabständige Basislinien.



(e) Zwei Streuer bei Elevationen  $s_1 = -20$  m und  $s_2 = +20$  m. Ungleichabständige Basislinien.



(f) Zwei Streuer bei Elevationen  $s_1 = +10$  m und  $s_2 = +50$  m. Ungleichabständige Basislinien.

**Abb. 2.6:** Abhängigkeit des Reflexionsprofils von der Basislinienkonfiguration sowie der Anzahl der Streuer.

vationen  $s_1 = -20\text{ m}$  und  $s_2 = +20\text{ m}$ . Das gemeinsame Reflexionsprofil ist die Überlagerung der beiden einzelnen Sinc-Funktionen.

Aus den genannten Gründen ist im Realdatenfall nicht mit gleichabständigen Basislinien zu rechnen. Es ist zu untersuchen, wie das Reflexionsprofil bei unregelmäßig verteilten Basislinien aussieht. Dafür werden 20 Basislinien zwischen  $-285\text{ m}$  und  $+285\text{ m}$  zufällig ausgewählt. Die Verteilung ist in Abbildung 2.6(c) zu sehen. Es gibt eine Häufung von Basislinien im Bereich von  $240\text{ m}$  bis  $280\text{ m}$ . Das Reflexionsprofil in Abbildung 2.6(d) entstand mit genau den gleichen Parametern wie in Abbildung 2.6(a) mit dem einzigen Unterschied der ungleichmäßigen Basislinien. Das resultierende Reflexionsprofil ist nun keine Sinc-Kurve mehr. Die Nebenkeulen haben eine relative Amplitude von etwa  $0,56$ . Das Reflexionsprofil ist symmetrisch um den Streuer verteilt.

Abbildung 2.6(e) zeigt die Simulation zweier Streuer, die die gleichen Elevationen wie in Abbildung 2.6(b) besitzen. Die Nebenkeulen erreichen jetzt relative Amplituden von rund  $0,7$ . Auch hier ist das Reflexionsprofil symmetrisch. Verschiebt man die Streuerelevationen gleichmäßig um  $30\text{ m}$  nach oben, so zeigt sich in Abbildung 2.6(f), dass sich das Reflexionsprofil um ebenfalls  $30\text{ m}$  nach rechts verschiebt. Die Struktur des Profils bleibt erhalten. Die Topologie von Reflexionsprofilen ist demnach nicht abhängig von den Elevationen der Streuer. Es besteht jedoch eine starke Abhängigkeit von der Verteilung der Basislinien.

Das angeführte Beispiel zeigt, wie das Reflexionsprofil einer Auflösungszelle abhängig von der gegenseitigen Überlagerung mehrerer Streuer sowie der unregelmäßigen Basislinie ist. Diese Unregelmäßigkeit, die im Realdatenfall immer anzutreffen ist, entspricht einer unregelmäßigen Abtastung des Signals. Kapitel 2.3 hat gezeigt, dass das Reflexionsprofil das Amplitudenspektrum des Signals ist. Somit liegt die Herausforderung für die Inversion bei der Rekonstruktion des Amplitudenspektrums bei wenigen und ungleichmäßig verteilten Abtaststellen.

## Kapitel 3

# Inversionsansätze

Das in Kapitel 2.6 beschriebene Problem der Inversion der gemessenen Signale in das Amplitudenspektrum über die Elevation kann auf mehrere Arten gelöst werden. Fünf mathematische Ansätze, die sich in zwei Gruppen einteilen lassen, werden hier vorgestellt. Eine grundlegende Gemeinsamkeit aller Verfahren ist der Anspruch, ein optimales Ergebnis für ein **unterbestimmtes nichtlineares System** zu finden. Aus beispielsweise  $P = 20$  Aufnahmen sollen die Elevationen an  $\delta = 401$  diskreten Stellen eines Reflexionsprofils einer Auflösungszelle berechnet werden. Die Verfahren unterscheiden sich in einer Eigenschaft, die die weitere Untersuchung und das Anwenden der später vorgestellten Plausibilitätskriterien betrifft. Die Verfahren Beamforming, sowie die beiden auf der Singulärwertzerlegung beruhenden Verfahren liefern „kontinuierliche“ Reflexionsprofile. „Kontinuierlich“ ist hier nicht im streng mathematischen Sinne gemeint, da alle Berechnungen diskret auf vektoriierten Größen geschehen. Dieser Gruppe von Ansätzen liegt die in Kapitel 2.3 vorgestellte Eigenschaft zugrunde, dass das Reflexionsprofil über die Fouriertransformation mit dem Signal verknüpft ist. Das Spektrum eines diskreten Signals ist kontinuierlich. Die genannten Verfahren liefern somit von 0 verschiedene Werte für das gesamte Elevations-Spektrum.

Die zweite Gruppe bildet NLSE sowie der Compressive Sensing-Ansatz. Deren Ergebnisse sind „diskret“. Auch hier wird der Begriff im weiteren Sinne gebraucht. Für die NLSE-Lösung wird apriori die Anzahl der  $K$  Streuer eingeführt und das Problem parameterisiert. Somit wird das unterbestimmte in ein überbestimmtes System überführt. Das Verfahren liefert einen Vektor mit genau  $K$  Elevationen. Das Compressive Sensing liefert zwar auch für das gesamte Elevations-Spektrum relative Amplituden, jedoch nur an wenigen Stellen Werte, die sich stark von 0 unterscheiden. Somit wird im Folgenden zwischen kontinuierlichen und diskreten Verfahren unterschieden.

### 3.1 Beamforming

Ein naheliegender Inversionsansatz besteht in der direkten Inversion der Gleichung (2.20):

$$\vec{\gamma} = L^* \vec{g} \quad (3.1)$$

$L^*$  ist die komplex konjugierte Matrix der  $[P \times \delta]$ -Matrix  $L$ .

Das Wörterbuch  $L$  enthält alle synthetisch herstellbaren Kombinationen aus  $P$  Basislinien und  $\delta$  Elevationen:

$$L = \begin{bmatrix} \exp(j \cdot B_1 \cdot S_1) & \exp(j \cdot B_1 \cdot S_2) & \cdots & \exp(j \cdot B_1 \cdot S_\delta) \\ \exp(j \cdot B_2 \cdot S_1) & \exp(j \cdot B_2 \cdot S_2) & \cdots & \exp(j \cdot B_2 \cdot S_\delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j \cdot B_P \cdot S_1) & \exp(j \cdot B_P \cdot S_2) & \cdots & \exp(j \cdot B_P \cdot S_\delta) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit: } B_p = \frac{4\pi b_{\perp,p}}{\lambda \bar{r}}$$

$S_i$  beschreibt die Elevation. Die Multiplikation mit  $L^*$  stellt eine Kohärenzmaximierung des Signals dar. Die Kohärenz ist hier ein Maß für die komplexe Korrelation der Signale der einzelnen Aufnahmen mit dem synthetisierten Signal aller möglichen Elevationen. Sind beispielsweise zwei trennbare Streuer in einer Auflösungszelle enthalten, so sind diese beiden signifikanten Signalanteile in allen Aufnahmen vorhanden. Das Wörterbuch  $L$  enthält alle Kombinationen aus Aufnahmen und Elevationen für die gegebenen Basislinien. Die Multiplikation mit dem invertierten Wörterbuch  $L^*$  liefert das Reflexionsprofil, welches die größte Kohärenz zwischen den Aufnahmen darstellt. Um  $L$  aufstellen zu können, müssen also apriori Informationen über den Raum der möglichen Elevationen gegeben sein. Die mathematische Herleitung dieser Erklärung ist im Anhang B ab Seite 84 zu finden.

Für gleichabständige Basislinien ist diese Operation die direkte diskrete Fouriertransformation [26]. Wie zuvor beschrieben liegen die Basislinien im Realdatenfall jedoch nicht gleichabständig vor. Eine Näherung für den Einfluss  $E_p$  der Ungleichabständigkeit auf die Phase einer Aufnahme wird in [12] hergeleitet. Die Basislinie einer gleichabständigen Verteilung, die der tatsächlich vorhandenen Basislinie  $b_{\perp,p}$  am nächsten liegt, sei  $b_{\perp,p}^g$ . Die Auflösungszelle beinhalte einen dominanten Streuer mit der Elevation  $s = \bar{s}$ . Dann ist der Einfluss auf die Phase  $E_p(\bar{s})$  näherungsweise gegeben durch [12]:

$$E_p(\bar{s}) \approx \frac{b_{\perp,p}^g - b_{\perp,p}}{\bar{r}} \bar{s} \quad (3.2)$$

Um die Gleichabständigkeit zu erreichen, können die komplexwertigen Signale auf ein gleichmäßiges Raster interpoliert werden [12]. Anschließend ist eine diskrete Fouriertransformation durchführbar. Jedoch ist die Interpolation nicht immer fehlerfrei möglich. Ansätze, die über große Datenlücken interpolieren, wie beispielsweise in [23] beschrieben, eignen sich nur für einen Streuer pro Auflösungszelle [12]. Im Realdatenfall werden jedoch mehr als ein Streuer pro Auflösungszelle erwartet. In Kapitel 6 wird gezeigt, wie groß der Unterschied der rekonstruierten Reflexionsprofile zwischen Eingangsdaten mit gleich- und ungleichmäßigen Basislinien ist.

Die durch die Ortsfrequenz (2.15) bestimmte Auflösung der Elevation  $\delta_s$  beträgt

$$\delta_s = \frac{\lambda \bar{r}}{2b_{\perp} \cdot P} \quad (3.3)$$

Das Produkt  $b_{\perp} \cdot P$  ist die Gesamtlänge der Basislinie bei gleichabständiger Abtastung. Gleichung (3.3) entspricht der durch die Bandbreite im Ortsraum beschränkten maximalen Auflösung im Frequenzraum, also der maximalen Auflösung eines Streuers in Elevationsrichtung.

Die Auflösung ist also durch die Beugung des Signals begrenzt. Diese Grenze wird Rayleigh-Grenze genannt. Beamforming und die Fouriertransformation im gleichabständigen Fall sind somit keine Super-Resolution-Ansätze. Die zu erwartende Elevationsauflösung beträgt für einen TerraSAR-X typischen Fall gemäß Gleichung (3.3) etwa 31m. Hinzu kommt eine Verschlechterung durch das in den Signalen vorhandene Rauschen. Beamforming wird dennoch verwendet, da es ein sehr einfach zu implementierendes Verfahren darstellt und zu Vergleichszwecken herangezogen werden kann.

## 3.2 Singular Value Decomposition

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des inversen Problems ist die Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition, SVD). Die SVD wird unter anderem in der Bildanalyse für die Beurteilung der Bildqualität verwendet. Sie ist außerdem das wesentliche Mittel einer Hauptachsentransformation, wobei ein beliebiger Dimensionsraum mit korrelierten Koordinatenachsen so transformiert wird, dass die resultierenden Koordinatenachsen nicht miteinander korreliert sind. Dieses Verfahren wird zur Datenkompression, Rauschentfernung und generell zur Datenanalyse verwendet.

Singulärwerte und -vektoren geben Aufschluss über die Menge an verlässlich zu erhaltenen Informationen über die unbekannt Parameter bei vorhandenem Rauschen [12]. Für eine komplexe Matrix  $A$  mit der Dimension  $[m \times n]$  und Rang  $r$  gilt [14],[15]:

$$A = U\Sigma V^* = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^* \quad (3.4)$$

mit:

$U$  : unitäre Matrix mit Dimension  $[m \times m]$

$\Sigma$  : reellwertige Diagonalmatrix mit Dimension  $[m \times n]$

$V^*$  : adjungierte Matrix der unitären Matrix  $V$  mit Dimension  $[n \times n]$

Die Matrix  $\Sigma$  enthält die  $A$  charakterisierenden Singulärwerte  $\sigma_i$  auf ihrer Hauptdiagonalen. Für sie gilt:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0 \quad (3.5)$$

$U$  und  $V^*$  enthalten die linken und rechten Singulärvektoren von  $A$ . Die linken Singulärvektoren  $u_i$  entsprechen einer Orthonormalbasis im Beobachtungsraum, während die rechten Singulärvektoren  $v_i$  eine Orthonormalbasis im unbekannt Raum darstellen. Die Singulärwerte in  $\Sigma$  wirken wie Gewichtungsfaktoren, die die Linearkombination der Projektion vom Beobachtungsraum in den unbekannt Raum festlegen. Weiterhin gilt:

$$U^* \cdot U = V^* \cdot V = I \quad (3.6)$$

$$A^* \cdot A = V^* \cdot \Sigma^2 \cdot V \quad \text{und} \quad A \cdot A^* = U^* \cdot \Sigma^2 \cdot U \quad (3.7)$$

Wegen (3.7) und (3.6) gelten:

$$A^* \cdot A \cdot v_i = \sigma_i^2 \cdot v_i \quad (3.8)$$

$$A \cdot A^* \cdot u_i = \sigma_i^2 \cdot u_i \quad (3.9)$$

Wird für  $A$  die Singulärwertzerlegung aus Gleichung (3.4) eingesetzt und Gleichung (3.6) beachtet, ergibt sich:

$$A \cdot v_i = \sigma_i \cdot u_i \quad (3.10)$$

Wird die allgemeine Matrix  $A$  durch die Konjugierte des Wörterbuchs  $L$  ersetzt und die Singulärwertzerlegung somit auf TomoSAR angewandt, ergibt sich der Zusammenhang

$$L^* \cdot u_p = \sigma_p \cdot v_p \quad (3.11)$$

Die Konjugierte des Wörterbuchs  $L$  ist die Abbildung des gemessenen Signals  $g$  in den Frequenzraum. Die Zusammensetzung von  $L^*$  ist in Anhang B zu finden. Das Inversionsproblem lautet:

$$L^* \cdot \vec{g} = \sum_{p=1}^P g_p \exp(-j2\pi f_p s) \quad (3.12)$$

Einsetzen der rechten Singulärvektoren für  $g_p$  ergibt unter Beachtung von Gleichung (3.11):

$$v_p = \frac{1}{\sigma_p} \sum_{p=1}^P u_p \exp(-j2\pi f_p s) \quad (3.13)$$

Dies zeigt genau die oben beschriebene Beziehung zwischen der Orthonormalbasis des unbekanntes Raums  $v_i$  und der Linearkombination der mit  $\sigma_i^{-1}$  gewichteten Orthonormalvektoren des Beobachtungsraums. Dieser Zusammenhang wird genutzt, um von den beobachteten Signalen  $\vec{g}$  zum Reflexionsprofil einer Auflösungszelle zu kommen:

$$\gamma_{\text{SVD}} = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\sigma_p} (u_p^T \vec{g}) v_p = (V^* \cdot \Sigma^+ \cdot U^T) \cdot \vec{g} \quad (3.14)$$

wobei  $\Sigma^+$  die Pseudoinverse von  $\Sigma$  darstellt und  $U$ ,  $\Sigma$  und  $V$  sich auf die Singulärwertzerlegung von  $L$  beziehen.

Wie auch beim Beamforming sind die Eingangssignale nicht gleichverteilt. Der Ansatz der Interpolation kann auch hier angewandt werden. Wie in [12] hergeleitet wird, entspricht die SVD-Zerlegung einer Matrix  $G$  einer Interpolation auf ein gleichmäßiges Raster. Die Matrix  $G$  enthält die Interpolation in der Form:

$$G_{mn} = 2a \cdot \text{sinc}[2a(f_p - f_m)] \quad (3.15)$$

wobei  $f_p$  die ungleichmäßigen Basislinien und  $f_m$  die regelmäßigen Basislinien enthält.  $2a$  bezieht sich auf die Ausbreitung der Elevationen. Im Kapitel 6 wird gezeigt, dass der Einfluss der unregelmäßigen Basislinien auf die Reflexionsprofile zwar groß ist, die daraus abgeleiteten Maxima jedoch nicht wesentlich verändert werden.

Analog zu großen Amplituden der Fourier-Transformierten eines Signals haben große Singulärwerte und die dazugehörigen Singulärvektoren einen größeren Beitrag am Gesamtsignal als kleine Singulärwerte und -vektoren [12]. Kleine Singulärwerte und die dazugehörigen Singulärvektoren entsprechen hochfrequenten Anteilen im Signal. Durch die Invertierung der Singulärwerte kommt es jedoch zu einem ungünstigen Rauschverhalten. Singulärvektoren, die

zu einem großen Singulärwert gehören, werden durch den Faktor  $\frac{1}{\sigma_i}$  stärker gedämpft als die entsprechenden Singulärvektoren kleinerer Singulärwerte. Somit werden Singulärvektoren deren Rauschbeitrag im Verhältnis zum Signalbeitrag groß ist, stärker im rekonstruierten Signal vertreten sein als Singulärvektoren mit einem kleineren Rausch/Signalverhältnis. Hier setzen die beiden angewandten SVD-Verfahren an. Je nach Umgang mit den Singulärwerten kann eine gegen Rauschen robustere Linearkombination der Singulärvektoren gefunden werden. Zwei Methoden hierfür werden im Folgenden vorgestellt.

### 3.2.1 Truncated Singular Value Decomposition

Bei der Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) werden kleine Singulärwerte ab einem Schwellwert zu Null gesetzt, sodass nur die großen Singulärwerte und somit Singulärvektoren zur Signalrekonstruktion herangezogen werden:

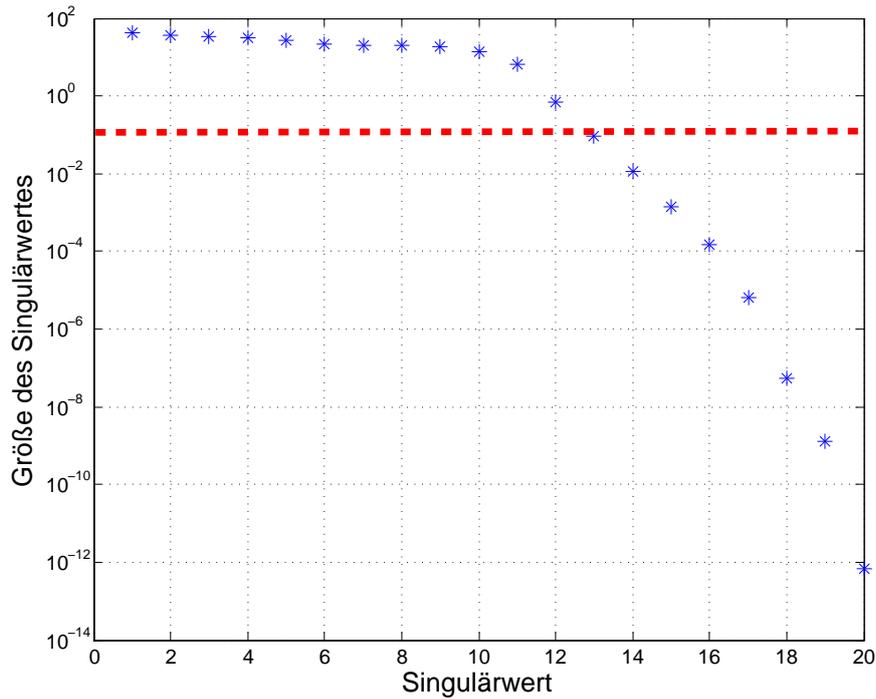
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \sigma_p & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \sigma_P & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \sigma_p = \begin{cases} \sigma_p & \text{für } \sigma_p \geq \sigma_\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.16)$$

Dies hat zur Folge, dass hochfrequentes Rauschen herausgefiltert wird, welches sonst Instabilitäten hervorrufen könnte [12]. Die TSVD verhält sich ähnlich wie eine Tiefpassfilterung mittels Fouriertransformation. Man nimmt dafür in Kauf, dass die Inversion nicht mehr exakt ist. Jedoch werden gerade die Singulärvektoren verworfen, die ein großes Verhältnis aus Rausch- zu Signalbeitrag liefern. Somit ist eine Lösung zu erwarten, die robuster gegenüber Rauschen ist als die Lösung mit allen Singulärvektoren. Eine Betrachtung der auftretenden Singulärwerte für reale Daten zeigt, dass es zunächst viele Werte größer 1 und dann einen abrupten Abfall Richtung 0 gibt. Abbildung 3.1 zeigt den Verlauf der Singulärwerte in absteigender Sortierung. Zu beachten ist die logarithmische Skalierung der Y-Achse. Man erkennt zunächst die Gruppe der Singulärwerte deutlich  $> 1 = 10^0$  und das anschließende rasche Absinken der Werte zu 0 hin.

Für die Wahl des Schwellwertes  $\sigma_\Delta$  kann gezeigt werden, dass eine optimale Lösung erreicht wird, wenn  $\sigma_\Delta = \frac{1}{\sqrt{SNR}}$  [18], [12]. Das SNR steht für das Signal-Rausch-Verhältnis einer Auflösungszelle. Starke Streuer weisen typischerweise SNR-Werte zwischen 10 dB und 50 dB auf. Dafür ergeben sich Schwellwerte zwischen  $\sigma_\Delta = 0,32 \dots 0,0032$ . Da bei realen Daten kein genauer Wert für das SNR angegeben werden kann, wird von einem SNR von 20 dB ausgegangen, was einem Schwellwert für die Singulärwerte von  $\sigma_\Delta = 0,1$  entspricht. Alle Singulärwerte die kleiner als dieser Wert sind, werden auf 0 gesetzt. Die übriggebliebenen Singulärwerte werden auf 1 gesetzt, sodass alle verbliebenen Singulärvektoren gleichmäßig zur Signalrekonstruktion beitragen. Nach dem „Abschneiden“ der kleinen Singulärwerte kann die Inversion nach (3.14) angewandt werden:

$$\gamma_{TSVD} = \sum_{p=1}^{P_\Delta} \frac{1}{\sigma_p} (u_p^T \vec{g}) v_p \quad (3.17)$$

wobei  $P_\Delta$  den letzten noch zu verwendende Singulärwert bezeichnet.



**Abb. 3.1:** Größe der Singulärwerte. Y-Achse logarithmisch. Rot gestrichelte Linie: Verwendeter Schwellwert  $\sigma_{\Delta} = 0,1$ .

Dieses Umgehen mit kleinen Singulärwerten setzt voraus, dass es den in Abbildung 3.1 dargestellten Verlauf der Singulärwerte gibt. Es gibt Matrizen, die eine klare Unterteilung zwischen großen und kleinen Singulärwerten erlauben (engl.: well-determined), sowie Matrizen, deren Singulärwerte wesentlich flacher abfallen (engl.: ill-determined). In Anwendungen mit realen Daten können flach abfallende Singulärwertverläufe vorkommen [29]. Daher wird im Folgenden die zweite auf SVD basierende Methode vorgestellt, die anstatt eines festen Schwellwertes eine Gewichtung der Singulärwerte vornimmt.

### 3.2.2 Weighted Singular Value Decomposition

Da nicht immer mit dem oben genannten Verhalten der Singulärwerte gerechnet werden kann, wird in [27] die Einführung eines weichen Schwellwertes vorgeschlagen. Dies führt zum Ansatz der Weighted Singular Value Decomposition (WSVD). Die Singulärwerte werden in Abhängigkeit vom Rauschen gewichtet. Das Verfahren geht zurück auf Norbert Wiener, der ein Filter zur optimalen Rauschunterdrückung entwickelt hat (Wiener-Filter). Die Gewichtung  $W_i$  des jeweiligen Singulärwertes  $\sigma_i$  basiert auf dem Verhältnis des jeweiligen Singulärwertes zu einem Wert  $\epsilon = f(SNR)$  [22]:

$$W_p = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \epsilon^2} \quad (3.18)$$

$\epsilon$  soll eine Funktion des SNR sein. Ein hohes SNR ergibt ein kleines  $\epsilon$ . In [27] wird diskutiert, dass  $\epsilon$  größenordnungsmäßig im Bereich der vorhandenen Singulärwerte liegen sollte. Die drei

Varianten  $\epsilon = \sigma_{min}$ ,  $\epsilon = \sigma_{mean}$  und  $\epsilon = \sigma_{max}$  werden dort verglichen. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, desto geringer wird der Einfluss der kleinen Singulärwerte. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die gesamte Rekonstruktion hauptsächlich auf den großen Singulärwerten und den dazugehörigen Singulärvektoren basiert. Als geeignetes Maß für  $\epsilon$  zeigt sich in [27]  $\epsilon = \sigma_{mean}$  und  $\epsilon = \sigma_{max}$ .

Eine andere Herangehensweise wird in [29] vorgestellt. Hier wird das Rauschniveau  $\epsilon$  aus den  $\eta_\epsilon$  Singulärvektoren berechnet, die eindeutig kleine Singulärwerte haben und somit nicht zur Rekonstruktion verwendet werden sollen. Für diese Singulärwerte und -vektoren werden Koeffizienten  $\beta_p$  berechnet:

$$\beta_p = u_p^T g, \quad p = P - \eta_\epsilon + 1, \dots, P \quad (3.19)$$

was der Projektion der Messungen  $g$  auf die Singulärvektoren entspricht. Ein Schätzer des Rauschniveaus kann dann als Mittel dieser Koeffizienten über alle Aufnahmen berechnet werden:

$$\hat{\epsilon} = \sqrt{\left( \frac{P}{\eta_\epsilon} \sum_{p=P-\eta_\epsilon+1}^P \beta_p^2 \right)} \quad (3.20)$$

Ähnlich wie bei der Truncated SVD muss hier ein Schwellwert festgesetzt werden, ab welchem Betrag ein Singulärwert zu der Gruppe gezählt wird, die nicht zur Rekonstruktion herangezogen werden soll. In dieser Masterarbeit wird der erste Ansatz mit  $\epsilon = \sigma_{max}$  verwendet.

Die vorgeschaltete Gewichtung führt somit zu der Erweiterung von (3.14) zu:

$$\gamma_{WSVD} = \sum_{p=1}^P \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \epsilon^2} (u_p^T \vec{g}) v_p \quad (3.21)$$

Es ist zu erwarten, dass sowohl der TSVD- als auch der WSVD-Ansatz aufgrund der Robustheit gegenüber Rauschen höher auflösend sind, als das zuvor vorgestellte Beamforming. Dies wird in Kapitel 6 validiert.

### 3.3 Nonlinear Least Squares Estimation

Die Nonlinear Least Squares Estimation (NLSE) ist ein parametrischer Ansatz und löst das inverse Problem (2.16) durch die Einteilung der Unbekannten in lineare und nicht lineare Parameter. Das Signal  $\vec{g}$  ist per se nicht linear, jedoch kann die Amplitude (linear)  $\gamma_k$  getrennt von den nicht linearen Elevationen  $s_k$  betrachtet werden. Das aus  $K$  Streuern zusammengesetzte Signal nach (2.16) kann in Matrixschreibweise wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{g} = H(\vec{s})\vec{x} + \vec{v} \quad (3.22)$$

mit :

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_P \end{bmatrix} \quad H(\vec{s}) = \begin{bmatrix} e^{j2\pi f_1 s_1} & \dots & e^{j2\pi f_1 s_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_P s_1} & \dots & e^{j2\pi f_P s_k} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_P \end{bmatrix}$$

$\vec{g}$  enthält das gemessene Signal von  $P$  Aufnahmen der gleichen Auflösungszelle. In der Formulierung des Ausgleichungsproblems mittels kleinster Quadrate stellen diese Messungen die Beobachtungen dar. Die Matrix  $H$  hängt sowohl von der Aufnahmegeometrie als auch von den Elevationen der  $K$  Streuer ab und hat die Dimension  $[P \times K]$ .  $H$  kann verglichen werden mit dem Wörterbuch  $L$ , wobei  $H$  das Wörterbuch für  $K$  Elevationen mit bekannten Elevationen ist. In Bezug zum Ausgleichungsproblem entspricht  $H$  der Designmatrix des nichtlinearen Anteils des funktionalen Zusammenhangs zwischen Beobachtungen und Parametern.  $\vec{x}$  enthält die Amplituden der  $K$  Streuer und  $\vec{v}$  das Messrauschen, welches als unkorreliert angenommen wird. Das funktionale Modell nach kleinsten Quadraten lässt sich wie folgt formulieren [21]:

$$\hat{x} = (H(\vec{s})^T \bar{P} H(\vec{s}))^{-1} H(\vec{s})^T \vec{g} \quad (3.23)$$

Die Gewichtsmatrix  $\bar{P}$  ist hier die Einheitsmatrix, da davon ausgegangen werden kann, dass die einzelnen Parameter untereinander unkorreliert sind. Gleichung (3.23) minimiert die Quadratsumme der Verbesserungen  $g - H(\vec{s})x$  und liefert somit den optimalen erwartungstreuen Schätzer unter der Voraussetzung, dass das Rauschen normalverteilt ist [21].

Zur Berechnung der ausgeglichenen Amplituden  $\hat{x}$  müssen die Elevationen  $s$  der  $K$  Streuer bekannt sein. Genau diese Elevationen sind jedoch gesucht und führen zur anfänglichen Formulierung des inversen Problems. Aufgrund der hohen Nichtlinearität der Elevationen in den Exponenten müssen die Elevationen als bekannt vorausgesetzt werden. Um die optimalen Elevationen zu finden, muss daher eine  $K$ -dimensionale Suche durchgeführt werden. Als Maß für die optimalen Elevationen bietet sich die Maximierung von

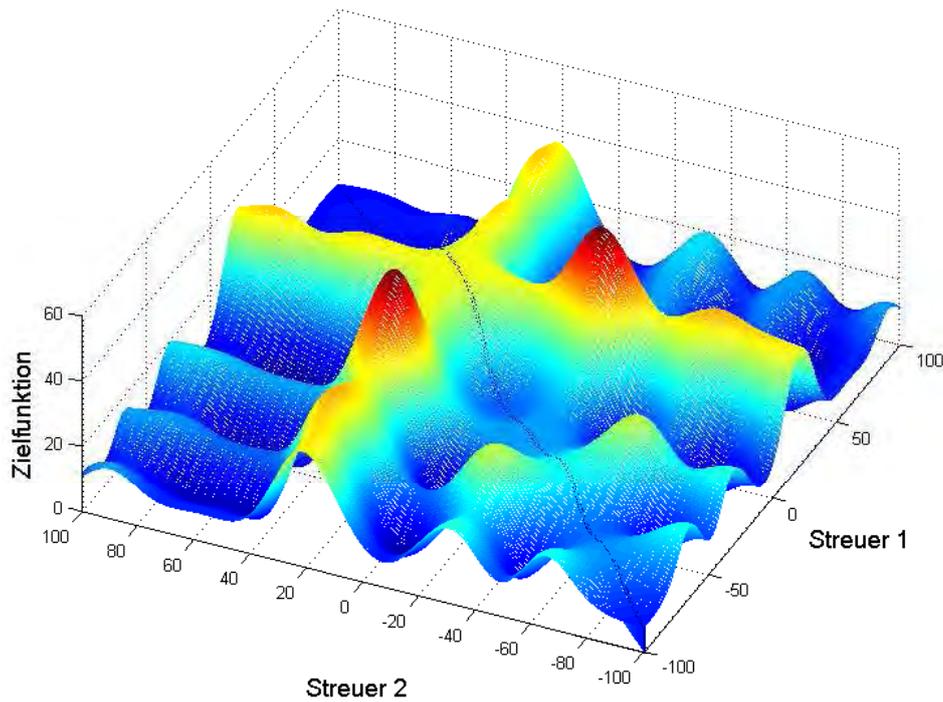
$$\vec{g}^T H(\vec{s}) \hat{x} \rightarrow \max_{\vec{s}} \quad (3.24)$$

an. Dieser Ansatz kann mit der Kohärenzmaximierung beim Beamforming verglichen werden, bei der ebenfalls die beste Übereinstimmung der Kombinationen aus Messungen und Elevationen in einem Wörterbuch gesucht ist. Abbildung 3.2 zeigt ein beispielhaftes Ergebnis der Suche für  $K = 2$ . Im zweidimensionalen Funktionsgebirge kann nun das Maximum gefunden werden. Da jede Möglichkeit von Kombinationen der  $K$  Streuer getestet werden muss, ist das Verfahren sehr rechenintensiv mit einer Laufzeitkomplexität von  $\mathcal{O}(\delta^K)$ . In der Praxis resultiert dies für eine Auflösungszelle und der apriori festgelegten Streueranzahl von  $K=2$  in eine Rechenzeit von bereits 30 Sekunden. Da für die Validierung häufig Elevationsprofile mit einer Länge von bis zu 120 Pixeln berechnet werden, ist die Berechnung mittels NLSE auf zwei Streuer limitiert. Diese Anzahl genügt in vielen Fällen. Als Beispiel ist hier die Trennung der Signalanteile der Fassade und des Bodens zu nennen.

NLSE liefert das optimale Ergebnis, wenn das Rauschen weiß und gleichverteilt ist [21]. Außerdem ist die Auflösung nicht durch die Rayleigh-Grenze (Gleichung (3.3)) eingeschränkt. Somit stellt NLSE einen Vertreter der Super-Resolution-Algorithmen dar. Es kann jedoch nicht als gegeben angesehen werden, dass das Rauschen im Realdatenfall diesen Ansprüchen genügt.

### 3.4 Compressive Sensing

Compressive Sensing ist ein neues Verfahren um unterbestimmte, dünnbesetzte Gleichungssysteme optimal zu lösen. Das Verfahren wird häufig in der Signalverarbeitung eingesetzt,



**Abb. 3.2:** Beispiel für ein Gridsearch-Ergebnis. X-Achse: Elevation des ersten Streuers. Y-Achse: Elevation des zweiten Streuers. Z-Achse: Wert der Zielfunktion.

um Informationen zu komprimieren oder Signale von Rauschen zu trennen [31]. Dabei wird das Signal als Linearkombination möglichst weniger Einträge eines Wörterbuchs erfasst und verarbeitet [1]. Dies impliziert die Nutzung von Sparse-Techniken, das heißt der Verwendung dünnbesetzter Matrizen bzw. Vektoren. Dabei wird angenommen, dass von einem Signal  $x$  nur einige Messungen  $y$  bekannt sind. Für die Beschreibung des Compressive Sensing im allgemeinen Fall wird auf die in der Literatur übliche Notation übergegangen. In Kapitel 3.4.2 wird dieser Ansatz auf SAR-Daten angewandt und wieder auf die vorherige Notation übergegangen.

### 3.4.1 Mathematische Beschreibung des Compressive Sensing

Ein beliebiges, eindimensionales Signal  $x$  der Länge  $N$  kann ausgedrückt werden als gewichtete Summe von  $N$  orthogonalen Basisvektoren:

$$x = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i \quad (3.25)$$

$\psi_i$  sind die orthogonalen Basisvektoren und  $s_i$  die entsprechenden Gewichtungen. Die Summe kann in eine Matrizenform umgeschrieben werden:

$$x = \Psi s \quad (3.26)$$

Somit sind  $x$  und  $s$  gleichwertige Beschreibungen des Signals, jedoch in anderen Räumen [1]. Es ist nun die Aufgabe des CS-Algorithmus,  $s$  zu rekonstruieren, wenn nur  $M$  Messungen  $y$

vorliegen. Dabei ist  $M < N$ . Es gibt also nur wenige Messungen eines langen Signals,  $y$  und  $s$  hängen wie folgt miteinander zusammen [29]:

$$y = \Phi x = \Phi \Psi^H s = \Theta s \quad (3.27)$$

$\Phi$  ist die Messmatrix, die für jeden Messvorgang immer gleich ist. Ihre Dimension ist  $[M \times N]$ . Die Herausforderung besteht nun darin, eine Messmatrix  $\Phi$  sowie einen Rekonstruktionsalgorithmus zu finden, der aus den  $M$  Messungen das Gesamtsignal  $x$  bestmöglich rekonstruieren kann. Für die Messmatrix müssen zwei Bedingungen gelten [29]:

### 1. Inkohärenz

Die Messmatrix  $\Phi$  muss zusammen mit der Orthogonalmatrix  $\Psi$  inkohärent sein. Das bedeutet, dass durch die Multiplikation mit  $\Psi$  die dünnbesetzte Information über den gesamten Projektionsraum gestreut wird. Die Zeilen von  $\Phi$  dürfen nicht die Spalten von  $\Psi$  repräsentieren und andersherum. Andernfalls würden sich Verschiebungen des Ergebnis hin zu einzelnen Werten ergeben. Die Rekonstruktion würde folglich nicht die richtigen von Null verschiedenen Elemente in  $s$  und somit auch nicht in  $x$  liefern.

### 2. Eingeschränkte Isometrie

Die in der Literatur (beispielsweise [29], [1]) „restricted isometry property“ (RIP) genannte Eigenschaft wurde von Candès und Tao beschrieben und bezeichnet die Fähigkeit der Matrix  $\Theta$  aus  $M$  Messungen das Signal der Länge  $N$  zu rekonstruieren. Für einen beliebigen Vektor  $v$  mit den gleichen von Null verschiedenen Einträgen wie  $s$  und für eine Konstante  $\epsilon > 0$  muss gelten:

$$(1 - \epsilon) \leq \frac{\|\Theta v\|_2}{\|v\|_2} \leq (1 + \epsilon) \quad (3.28)$$

Das bedeutet, dass  $\Theta$  die Länge von  $v$  erhält. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt werden kann und die Ungleichung noch gilt, umso besser kann das verrauschte Signal rekonstruiert werden. Da die Positionen der von Null verschiedenen Einträge in  $s$  im Vorherein nicht bekannt sind, reicht es, die Bedingung (3.28) für einen beliebigen Vektor mit der dreifachen Menge als im Anwendungsfall an von Null verschiedenen Einträgen in  $s$  zu prüfen [1].

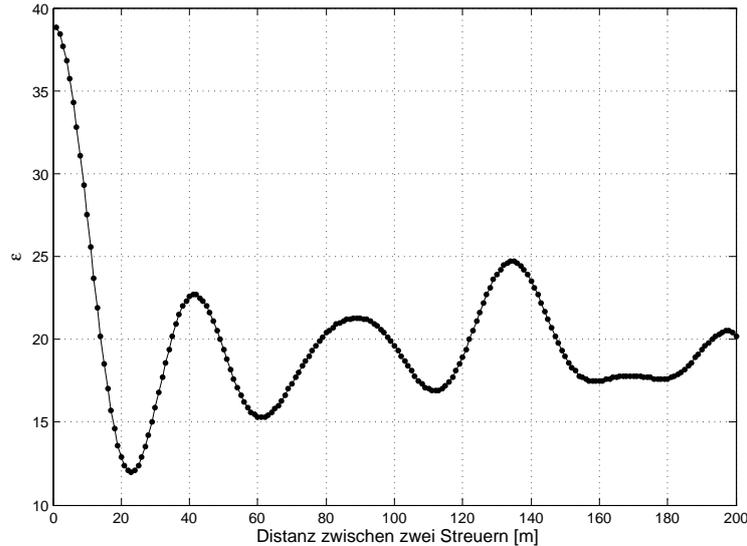
Abbildung 3.3 zeigt für eine zufällige Basislinienverteilung zwischen  $-250$  m und  $+250$  m und 20 Aufnahmen die Werte für  $\epsilon$ , die Gleichung (3.28) gerade noch erfüllen. Es ist zu erkennen, dass der Wert bei einem geringer werdenden Abstand steigt und das Signal somit schlechter vom Rauschen zu trennen ist. Dieses Verhalten kann für jegliche Basislinienkonfiguration beobachtet werden. Das Verhalten der Kurve für Distanzen  $> 20$  m hängt stark von der Basislinienverteilung ab.

Eine Matrix, die sowohl die Eigenschaft der eingeschränkten Isometrie als auch die Inkohärenz erfüllt, ist beispielsweise eine unkorrelierte, zufällig gaußverteilte Matrix. Für die Orthogonalmatrix bieten sich Orthogonalbasen, wie beispielsweise eine diskrete Kosinustransformation oder im einfachsten Fall die Einheitsmatrix, an [1].

Die Rekonstruktion des Signals der Länge  $N$  aus  $M$  Messungen mit  $M < N$  ist ein unterbestimmtes Problem und ergibt unendlich viele Lösungen. Daher müssen Bedingungen eingeführt werden, die die Zahl der möglichen Lösungen auf genau eine Lösung minimieren. Hier können verschiedene Ansätze gefunden werden:

### 1. $L_2$ -Norm Minimierung

$$\hat{s} = \arg \min_s \|s\|_2 \quad \text{für} \quad \Theta s = y$$



**Abb. 3.3:** Werte für  $\epsilon$ , die Gleichung (3.28) gerade noch erfüllen. Zufällige Basislinienverteilung, 20 Aufnahmen.

Die  $L_2$ -Norm entspricht der Minimierung nach kleinsten Quadraten. Die Minimierung ist durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems lösbar. Das Verfahren ist einfach zu implementieren, liefert jedoch keine dünnbesetzten Lösungen.

## 2. $L_0$ -Norm Minimierung

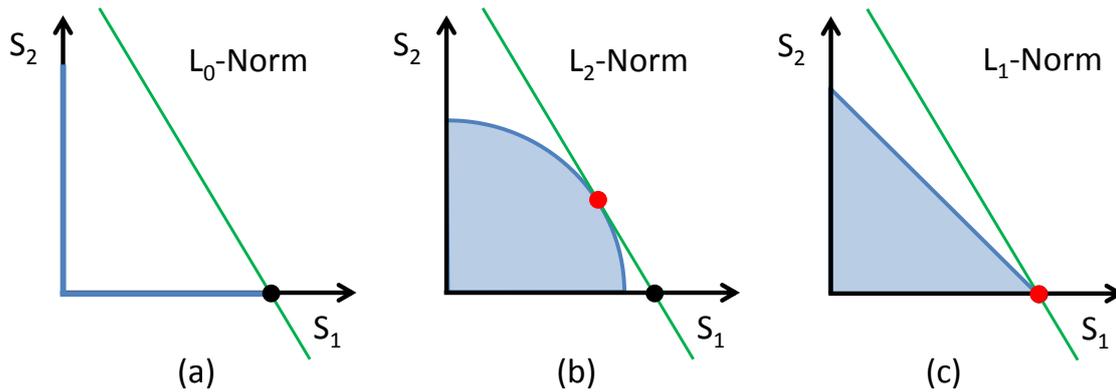
$$\hat{s} = \arg \min_s \|s\|_0 \quad \text{für} \quad \Theta s = y$$

Die  $L_0$ -Norm misst direkt die Anzahl der Einträge in  $s$ . Die Minimierung hiervon liefert somit die ideale Lösung. Jedoch ist das Problem NP-vollständig, das heißt, es müssen alle möglichen Kombinationen der  $K$  von Null verschiedenen Elemente für alle  $N$  möglichen Positionen durchprobiert werden. Der Aufwand beträgt somit  $\mathcal{O}\left(\binom{N}{K}\right)$ . Für TomoSAR entspräche dies bei  $N = \delta = 401$  Elevationen und  $K = 3$  Streuern über 10 Millionen Möglichkeiten. Dies ist mit den heutigen Rechenkapazitäten nicht effizient lösbar.

## 3. $L_1$ -Norm Minimierung

$$\hat{s} = \arg \min_s \|s\|_1 \quad \text{für} \quad \Theta s = y$$

Die  $L_1$ -Norm eines Vektors ist gleich der Summe seiner Einträge. In [3] wird gezeigt, dass diese Norm unter der Bedingung, dass die Zahl der Messungen  $M$  in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(K \log(N/K))$  liegt, genutzt werden kann, um den  $K$ -dünnbesetzten Vektor  $s$  zu rekonstruieren. Dieser Ansatz ist rechentechnisch mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(N^3)$  lösbar. Das Problem ist nun konvex und nichtquadratisch [4]. Für die Lösung solcher Probleme gibt es Algorithmen wie beispielsweise Basis Pursuit, die das Problem auf ein linear lösbares Problem umformulieren [4]. Für Matlab existiert eine entsprechende Umgebung namens „cvx“ [17], die in dieser Masterarbeit benutzt wird. Damit beträgt die Rechenzeit für einen typischen TomoSAR-Fall wenige Sekunden.



**Abb. 3.4:** Schematische Darstellung der Lösungen durch  $L_0$ -,  $L_2$ - und  $L_1$ -Minimierung. Grün: Vektor aller möglichen Lösungen des unterbestimmten Systems. Blau: Suchräume der Minimierungsmethoden. (a):  $L_0$ -Normierung, Suchraum fällt mit Koordinatenachsen zusammen. (b):  $L_2$ -Normierung, Suchraum ist ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung. (c):  $L_1$ -Normierung, Suchraum ist ein Quadrat. Abbildung in Anlehnung an [1]

#### 4. $L_1 - L_2$ -Norm Minimierung

$$\hat{s} = \arg \min_s \{ \|s\|_2^2 + \lambda_K \|s\|_1 \} \quad \text{für} \quad \Theta s = y$$

Eine Kombination aus  $L_2$ - und  $L_1$ -Norm stellt einen weiteren Ansatz dar. Er entspricht einem optimalen Kompromiss aus einer möglichst guten Beschreibung der Beobachtungen  $y$  durch das Modell  $\theta \cdot s$  und einer möglichst dünnbesetzten Lösung für  $s$ . Die Gewichtung der beiden Anteile kann über den Faktor  $\lambda_K$  gesteuert werden. Auf dieses Modell wird im folgenden Kapitel weiter eingegangen.

In Abbildung 3.4 sind die Lösungen der Minimierungsansätze visualisiert. Dabei muss beachtet werden, dass das Problem im Realdatenfall nicht zweidimensional, wie abgebildet, ist. Das heißt, die Menge aller möglichen Lösungen ist keine Gerade sondern eine Hyperfläche. In grün ist der Vektor aller möglichen Lösungen des unterbestimmten Systems, abgebildet im zweidimensionalen Raum, zu sehen. Die Lage des Vektors wird durch die Wahl der Messmatrix  $\Theta$  bestimmt. Der schwarze Punkt auf der  $S_1$ -Achse symbolisiert die richtige Lösung. Die Elevation  $S_1$  hat eine von 0 verschiedene Amplitude, enthält also einen Streuer während die relative Amplitude bei  $S_2$  0 ist. Der Eindruck eines Schnittes zwischen der grünen Gerade und der Achse  $S_2$  entsteht durch die Abbildung im Zweidimensionalen. (b) zeigt in blau die Lösung der  $L_2$ -Minimierung. Sie entspricht der Lösung mit dem kleinsten Abstand zum Ursprung. Bildlich gesprochen wird die  $L_2$ -Lösung durch die Ausdehnung der  $L_2$ -Hypersphäre (hier Kreis) und Tangieren des Lösungsvektors gefunden. In (c) ist das Äquivalent für die  $L_1$ -Normierung zu sehen. Statt des Kreises ist die Normierungsfigur im zweidimensionalen Raum eine gleichwinklige Raute. Durch diese spitz zulaufende Figur wird der Vektor aller möglichen Lösungen immer auf einer der Koordinatenachse geschnitten.

### 3.4.2 Anwendung des Compressive Sensing auf TomoSAR

Die Grundannahme für die Anwendung von CS auf TomoSAR ist, dass nur wenige dominante Streuer in einer Auflösungszelle zu finden sind. Nur mit dieser Annahme kann das eigentlich unterbestimmte Problem gelöst werden, also das Signal  $\gamma$  der Länge  $\delta$  aus nur  $P$  Messungen

rekonstruiert werden. Man kann davon ausgehen, dass sich maximal  $K = 5$  Streuer in einer Auflösungszelle befinden. Die Bedingung, die gelten muss, damit die  $L_0$ -Norm durch die  $L_1$ -Norm ersetzt werden kann, ist somit erfüllt, da für  $\delta = 401$  Elevationspositionen und  $P=20$  Aufnahmen gilt:

$$P \in \mathcal{O}(K \log(\delta/K)) = \mathcal{O}(5 \log(401/5)) = \mathcal{O}(22) \quad (3.29)$$

Gleichung (2.20) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Messung  $\vec{g}$  und den Parametern  $\vec{\gamma}$ . Gesucht ist die Lösung, die sowohl bestanpassend ist, also eine möglichst kleine Residuenquadratsumme hat, sowie möglichst wenig Streuer beinhaltet:

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma} \{ \|\vec{g} - L\vec{\gamma}\|_2^2 + \lambda_K \|\vec{\gamma}\|_1 \} \quad (3.30)$$

Es liegt demnach eine zu lösende  $L_1 - L_2$ -Normierung vor. In Analogie zu Gleichung (3.27) wird für die Orthogonalbasis die Einheitsmatrix gewählt. Die Projektion bildet somit auf sich selber ab. Die Messmatrix  $\Phi$  ist das Wörterbuch  $L$ , das die Messpositionen der  $P$  Aufnahmen enthält:

$$\Theta = \Phi\Psi^H = LI^H = L \quad (3.31)$$

Beliebig viele Streuer würden das Signal bestmöglich beschreiben. Auf dieses Problem der Überanpassung wird in Kapitel 4 eingegangen. Dem wird hier durch den zweiten Term, der  $L_1$ -Normierung, entgegengewirkt. Der Wert  $\lambda_K$  ist vom vorhandenen Rauschen abhängig. Für rauschfreie Daten, d.h.  $\lambda_K = 0$  ist die Lösung das tatsächliche Reflexionsprofil mit gleichabständigen Basislinien (Summe von Sinc-Kurven.). Das Ergebnis entspricht dann Abbildung 2.6(b) (Seite 22). Wählt man nun einen Wert für  $\lambda_K > 0$ , so wird die Bedingung nach möglichst wenigen Einträgen in  $\gamma$  berücksichtigt. Das Ergebnis ist dann ein Vektor, der nur an den Stellen einen wesentlich von 0 verschiedenen Eintrag hat, an denen sich tatsächlich ein Streuer befindet. In [4] wird für diesen Parameter vorgeschlagen:

$$\lambda_K = \sigma \sqrt{2 \log N_L} \quad (3.32)$$

wobei  $N_L$  die Anzahl der Einträge im Wörterbuch  $L$  ist und  $\sigma$  das Rauschniveau beschreibt. Wie im Kapitel 2.5 beschrieben, kann für das Rauschniveau die Amplitudendispersion bis etwa 0,25 als Näherung genutzt werden. Ein ausführlicher Vergleich und Diskussion des Einflusses von  $\lambda_K$  auf das Ergebnis eines Elevationsprofils folgt in Kapitel 6.2.2 (Seite 69).

Das Verfahren ist nicht an das Rayleigh-Kriterium als Auflösungsgrenze gebunden. Es sind somit Auflösungen unterhalb dieser Grenze möglich. Der einzige limitierende Faktor ist das Rauschen in den Daten und eine ungünstige Wahl von  $\lambda_K$ . Compressive Sensing beinhaltet im Unterschied zu den kontinuierlichen Verfahren bereits eine Modellselektion durch die Forderung, dass möglichst wenige Streuer enthalten sein sollen.

Das Ergebnis dieses Ansatzes ist im Idealfall ein Vektor mit genau  $K$  Einträgen ungleich Null. Da aber eine  $L_1$ -Normierung statt einer  $L_0$ -Normierung durchgeführt wird, kommt es auch in einigen anderen Elevationspositionen zu Einträgen ungleich Null. Daher muss dieses Verfahren ähnlich wie die auf der Spektralzerlegung beruhenden Verfahren betrachtet werden und beispielsweise ein Schwellwert festgelegt werden, ab dem ein lokales Maximum als Streuer erkannt wird. Ansätze hierfür werden in Kapitel 3.5 diskutiert.

### 3.5 Diskussion der vorgestellten Verfahren

Die verschiedenen Ansätze zur Rekonstruktion des Reflexionsprofils einer Auflösungszelle lösen alle ein unterbestimmtes System und benötigen Vorwissen. Zum einen ist dies die Festlegung des Bereichs der möglichen Elevationen und zum anderen apriori Wissen über die Anzahl der Streuer in einer Auflösungszelle. Die zentrale Rolle in allen Verfahren spielt das Wörterbuch  $L$ , in welches das Vorwissen über den Bereich der Elevation einfließt. Bei NLSE wird die Vorinformation über die Anzahl der Streuer als fester Parameter implementiert, beim Compressive Sensing in Form des Sparse-Ansatzes.

Eine weitere Betrachtung gilt der Art, wie aus dem Ergebnis eines Rekonstruktionsalgorithmus die Elevationen der Streuer abgeleitet werden. Bei NLSE ist dieser Wert parameterisiert, sodass er direkt abgelesen werden kann. Das Compressive Sensing liefert, ähnlich wie die kontinuierlichen Verfahren, einen Ergebnisvektor mit  $\delta$  Einträgen. Somit muss für Beamforming, die SVD-Verfahren sowie das Compressive Sensing eine Methode gefunden werden, wie aus den Reflexionsprofilen die Elevationen berechnet werden. Der einfachste Ansatz hierfür ist die Selektion der lokalen Maxima. Hier muss darauf geachtet werden, dass bei den auf der Spektralzerlegung basierenden Verfahren die Maxima aufgrund der Überlagerung mehrerer Streuer leicht verschoben sein können. Eine Alternative hierfür ist die Verfeinerung mittels einer NLSE-Schätzung wobei die Elevationen aus dem Reflexionsprofil als Näherungswerte dienen [29].

Das Auflösungsvermögen der vorgestellten Verfahren bei Vorhandensein von Rauschen ist eine weitere wichtige Charakterisierung. Während Beamforming nicht über die durch das Rauschen und die Rayleigh-Grenze beschränkte Auflösung hin Streuer verlässlich trennen kann, geben die SVD-Methoden die Möglichkeit zumindest den Rauschanteil zu minimieren. Es ist somit eine höhere Auflösung im Vergleich zum Beamforming zu erwarten. NLSE ist aufgrund der Parameterisierung nicht von der Rayleigh-Grenze beschränkt, jedoch sehr anfällig für Auflösungszellen mit einem geringen SNR. Compressive Sensing ist ebenfalls nicht durch die Rayleigh-Grenze beschränkt und ist bei richtig gewähltem  $\lambda_k$  sehr robust gegenüber Rauschen, was in Kapitel 6.2 gezeigt wird.

Für die Interpretation der Ergebnisse und einen Vergleich mit anderen Daten bedarf es einer Umrechnung der Elevation in die Höhe bezogen auf den Bezugspunkt. Dies geschieht durch die Multiplikation mit dem Sinus des Beleuchtungswinkels. Abbildung 2.3 auf Seite 15 zeigt den geometrischen Zusammenhang. Für einen TerraSAR-X typischen mittleren Beleuchtungswinkel von  $\Theta = 30^\circ \rightarrow \sin(\Theta) = \frac{1}{2}$  ergibt sich für die Höhe über dem Bezugspunkt genau die halbe Elevation. Zur Bestimmung von Höhenunterschieden wie beispielsweise dem Abstand zwischen zwei Fensterreihen, ist die genaue Kenntnis des Bezugspunktes nicht nötig. In dieser Arbeit wird jedoch mit der Elevation gerechnet und nur in einigen Fällen Elevations- in Höhenunterschiede umgerechnet. Ein Vergleich der vorgestellten Inversionsansätze auf Grundlage von Ergebnissen für synthetisierte und reale Daten folgt im Kapitel 6. Zunächst wird jedoch auf einen weiteren Aspekt eingegangen, der auf der Annahme weniger Streuer in einer Auflösungszelle beruht.

## Kapitel 4

# Modellselektion

Das Hauptinteresse bei TomoSAR liegt in der Gewinnung von Elevationen der dominanten Streuer in einer Auflösungszelle. In urbanen Gebieten kann für Auflösungszellen mit einer geringen Amplitudendispersion (gleichbedeutend mit einem hohen SNR) im Allgemeinfall davon ausgegangen werden, dass diese dominanten Streuer den überwiegenden Teil des Gesamtsignals ausmachen. Wie in Kapitel 2.3 beschrieben, setzt sich das Signal aus beliebig vielen Streuern zusammen. Die Annahme für urbane Gebiete lässt sich einschränken, sodass maximal  $K = 5$  Streuer in einer Auflösungszelle erwartet werden. Meist ist jedoch nur die Trennung der zwei oder drei dominantesten Streuern von Interesse.

Die Modellselektion bietet die Möglichkeit, das Vorwissen über eine geringe Anzahl von Streuern in die TomoSAR-Prozessierung einfließen zu lassen. Das in Kapitel 3.4 vorgestellte Inversionsverfahren Compressive Sensing besitzt schon eine implizite Modellselektion. Auch beim NLSE Ansatz in Kapitel 3.3 wird apriori die Anzahl der Streuer vorgegeben, sodass eine weitere Modellselektion überflüssig ist. Die im Folgenden vorgestellten Ansätze werden somit nur für die „kontinuierlichen“, nichtparametrischen Rekonstruktionsansätze Beamforming, TSVD und WSVD angewandt.

### 4.1 Ansatz

Die Erfassung von Daten zieht meist auch eine Modellierung der Daten nach sich. Sind alle physikalischen Zusammenhänge bekannt, kann das entsprechende Modell in die Daten geschätzt werden. Die resultierenden Residuen stellen dann lediglich das Messrauschen bzw. Unsicherheiten dar, die im physikalischen Modell vorhanden sind. Anders verhält es sich bei Messprozessen, deren physikalisches Modell nicht vollständig bekannt ist. Hier könnten zwar auch beliebig viele Parameter geschätzt und ein Modell geschaffen werden, das die Messdaten sehr gut beschreibt. Jedoch fehlt in einem solchen Fall die Aussagekraft des Modells, da der physikalische Zusammenhang nicht gegeben ist. Einen Mittelweg bildet der Messprozess bei TomoSAR. Hier ist das physikalische Modell grundsätzlich bekannt. Allerdings kennt man die genaue Anzahl der dominanten Streuer nicht. Es gibt also mehrere Modellkandidaten, aus denen das passenste ausgewählt werden muss. Genau dies ist die Aufgabe der Modellselektion. Dabei gilt es einen Kompromiss aus Komplexität und Entsprechung mit der Realität herzu-

stellen. Albert Einstein fasst den Ansatz der Modellselektion in zwei kurzen Sätzen zusammen: „Man sollte die Dinge so einfach wie möglich machen. Aber nicht einfacher.“

Der Ansatz der Modellselektion ist eine Approximation des rekonstruierten Reflexionsprofils durch das mit der gleichen Inversionsmethode generierte Reflexionsprofil von  $K_{syn}$  synthetisierten Streuern. Gesucht ist das Modell  $M_k = f(K_{syn})$ , welches die gegebenen Daten bestmöglich beschreibt und weitere Bedingungen erfüllt. Die Wahl des Modells  $M_k$  ist abhängig von der Güte der Approximation  $\Omega_k$ . Je besser das Eingangssignal approximiert wird, desto wahrscheinlicher ist die Wahl des entsprechenden Modells. Es ist leicht einsehbar, dass eine große Anzahl von synthetischen Streuern das Signal am Besten annähert. Dies kann mit der Überanpassung bei Regressionsaufgaben verglichen werden: Je höhergradig das Polynom ist, desto besser werden die Datenpunkte angenähert. Da man apriori von wenigen dominanten Streuern ausgehen kann, muss also ein Kompromiss aus einem geringen  $K_{syn}$  und einer guten Approximation gefunden werden.

Abbildung 4.1 zeigt das Prinzip der Modellselektion in vier Schritten. Für jedes  $K_{syn}$  zwischen 1 und 5 werden die  $K_{syn}$  Maxima mit den höchsten relativen Amplituden ausgewählt (Schritt 2) und das synthetische Reflexionsprofil mit diesen Elevationen berechnet. Anschließend wird das synthetische Signal mit dem gleichen Inversionsansatz wie das gemessene Signal invertiert (Schritt 3). Das synthetische  $\tilde{\gamma}_k$  und das gemessene Reflexionsprofil  $\tilde{\gamma}$  werden nun voneinander abgezogen (gelbe Flächen in Schritt 3). Je besser das synthetische Signal das Messsignal approximiert, desto kleiner ist diese Differenz  $v$ :

$$v = |\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_k| \quad (4.1)$$

Die alleinige Nutzung von  $v$  bzw.  $f(v^2)$  als Bewertungskriterium für das beste Modell  $M_k$  ist aus den oben beschriebenen Gründen nutzlos. Ein weiterer Term in Abhängigkeit von  $K_{syn}$  wird hinzugefügt. Die zu minimierende Funktion lautet nun:

$$\Omega_k = f(v^2) + \rho(k) \quad (4.2)$$

Die Wahl von  $\rho(k)$  ist laut Hirotugu Akaike, dem Namensgeber eines weiter unten vorgestellten Informationskriteriums, nicht trivial sondern „die Kunst der Approximation“. Im Folgenden wird die Minimierung von  $\Omega_k$  betrachtet. Ausgewählt wird dann das dazugehörige Modell  $M_k$ . Es gibt verschiedene Ansätze für die Berechnung von  $\Omega_k$ . Zwei in der Literatur häufig zu findende Methoden sollen hier exemplarisch vorgestellt und miteinander verglichen werden.

## 4.2 Bayesian Information Criterion

Wie bei allen Ansätzen gilt auch für das Bayesian Information Criterion (BIC) die Annahme, dass das Modell  $M_k$  gewählt werden soll, welches die Daten  $y$  bestmöglich beschreibt. Für den Begriff „Beschreibung“ wird hier von den zu minimierenden Residuen auf die Maximierung der a posteriori-Wahrscheinlichkeit übergegangen [2]. Es ist also das Modell zu wählen, welches die größte a posteriori-Wahrscheinlichkeit hat:

$$\arg \max_{\Omega_k} \{P(\Omega_k|y)\} \quad (4.3)$$

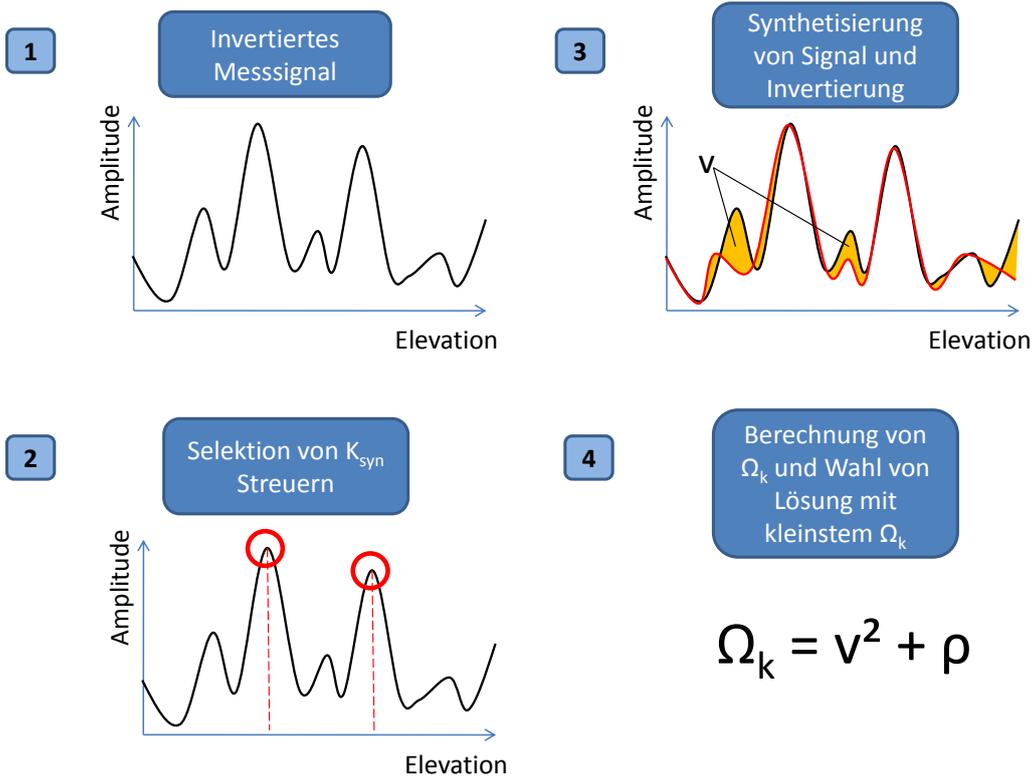


Abb. 4.1: Schema über Ablauf der Modellselektion.

Anwenden des Bayes-Theorems ergibt für die a posteriori-Wahrscheinlichkeit:

$$P(\Omega_k|y) = \frac{P(y|\Omega_k)P(\Omega_k)}{P(y)} \quad (4.4)$$

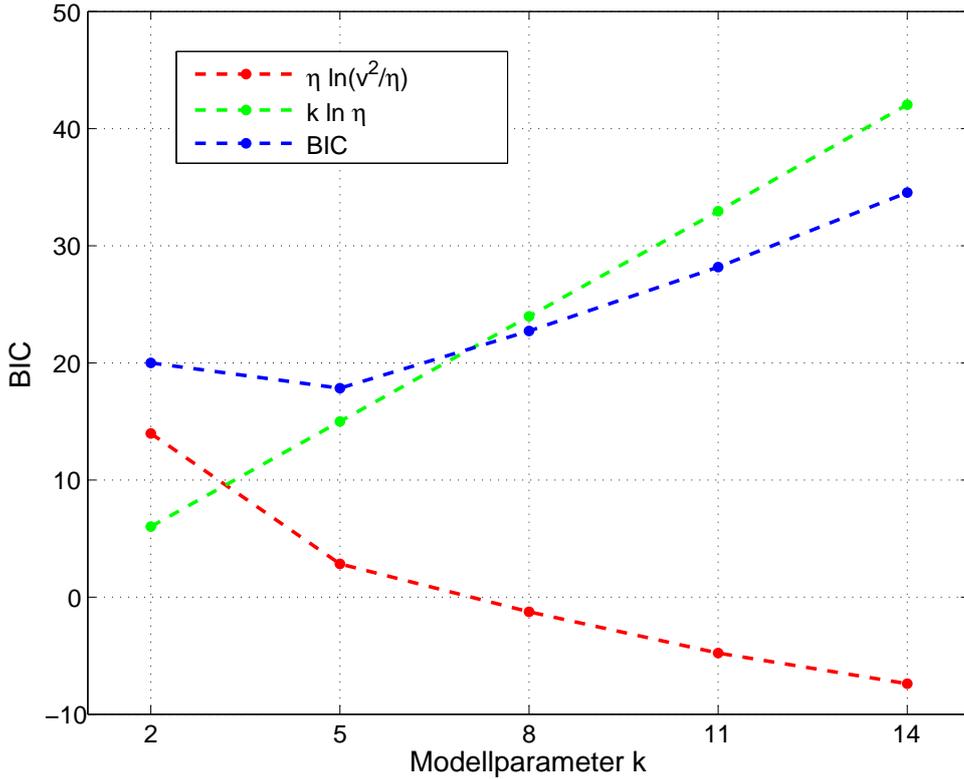
Unter der Annahme, dass alle Kandidatenmodelle  $M_k$  gleich wahrscheinlich sind, ist die a posteriori-Wahrscheinlichkeit nur von der Likelihoodfunktion  $P(y|\Omega_k)$  abhängig [2]. Im Folgenden wird daher ausschließlich auf die Maximierung der Likelihoodfunktion eingegangen. Die Herleitung des BICs ist in [2] beschrieben.

$$\Omega_{\text{BIC}} = \arg \min_k \{f(v^2) + \rho(k)\} = \arg \min_k \{-2 \ln P(y|\Omega_k) + k \ln \eta\} \quad (4.5)$$

$\eta$  ist die Anzahl der Samples. Da das Modell nicht im Frequenzraum (Raum des Reflexionsprofils) sondern im Ortsraum (Raum der gemessenen komplexwertigen Signale) modelliert wird, entspricht  $\eta$  der Anzahl der zur Verfügung stehenden Aufnahmen  $P$ . Die Verbesserungsquadratsumme  $v^2$  wird jedoch im Frequenzraum berechnet, da sie hier weniger anfällig gegenüber Rauschen ist [27] (Berechnung an beispielsweise  $\delta = 401$  anstatt an  $P = 20$  Stellen).

Wie in Formel (2.16) zu sehen ist, ist das komplexwertige Signal von der Amplitude, der Elevation und der Initialphase abhängig. Ein Streuer ist somit durch drei Parameter beschrieben. Dies ist die Komplexität des Modells. Da die Signale normalisiert werden, entfällt eine Amplitude [27]. Somit ergibt sich für  $K_{syn}$  Streuer:

$$k = 3K_{syn} - 1 \quad (4.6)$$



**Abb. 4.2:** Beispielhafte Zusammensetzung und Verlauf des BIC. Grün: Bestrafungsterm  $\rho(k) = k \ln \eta$ . Rot: log-Likelihood  $\eta \ln \frac{v^2}{\eta}$ . Blau: resultierender  $\Omega_{\text{BIC}, k}$ . Das Modell mit dem kleinsten  $\Omega_k$  wird gewählt. Hier:  $k = 5 \rightarrow K_{\text{sym}} = 2$ .

Unter der Annahme, dass die Residuen der Modellapproximation normalverteilt sind, ergibt sich für die Likelihoodfunktion [2]:

$$\Omega_{\text{BIC}} = \arg \min_k \left\{ \eta \ln \frac{v^2}{\eta} + k \ln \eta \right\} \quad (4.7)$$

Abbildung 4.2 zeigt die Zusammensetzung und den Verlauf des BIC für eine beispielhafte Auflösungszelle. Der Bestrafungsterm  $\rho(k)$  ist linear abhängig von der Anzahl der modellierten Streuer. Aus oben genannten Gründen wird die Verbesserungsquadratsumme mit steigendem  $k$  kleiner. Der Bestrafungsterm des BIC enthält die Anzahl der Samples, was im Fall TomoSAR der Anzahl der Aufnahmen entspricht. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum Akaike Information Criterion.

### 4.3 Akaike Information Criterion

Das nach Hirotugu Akaike benannte Akaike Information Criterion (AIC) ähnelt dem BIC sehr, jedoch ist der AIC unabhängig von der Anzahl der Datenpunkte  $\eta$ . Die Herleitung ist sowohl in [2] als auch in [24] zu finden.

$$\Omega_{\text{AIC}} = \arg \min_k \{f(v^2) + \rho(k)\} = \arg \min_k \left\{ -2 \ln \frac{v^2}{\eta} + 2k \right\} \quad (4.8)$$

Das Multiplizieren mit -2 hat historische Gründe [24]. Der AIC stellt eine Näherung der Kullback-Leibler-Information  $I(f, g)$  dar. Diese ist ein Maß für die Ähnlichkeit zwischen der Funktion  $f(x)$  und der aus dem Modell  $M_k$  stammenden Funktion  $g(x|M_k)$  und ist wie folgt definiert [2]:

$$I(f, g) = \int f(x) \ln \left( \frac{f(x)}{g(x|M_k)} \right) dx \quad (4.9)$$

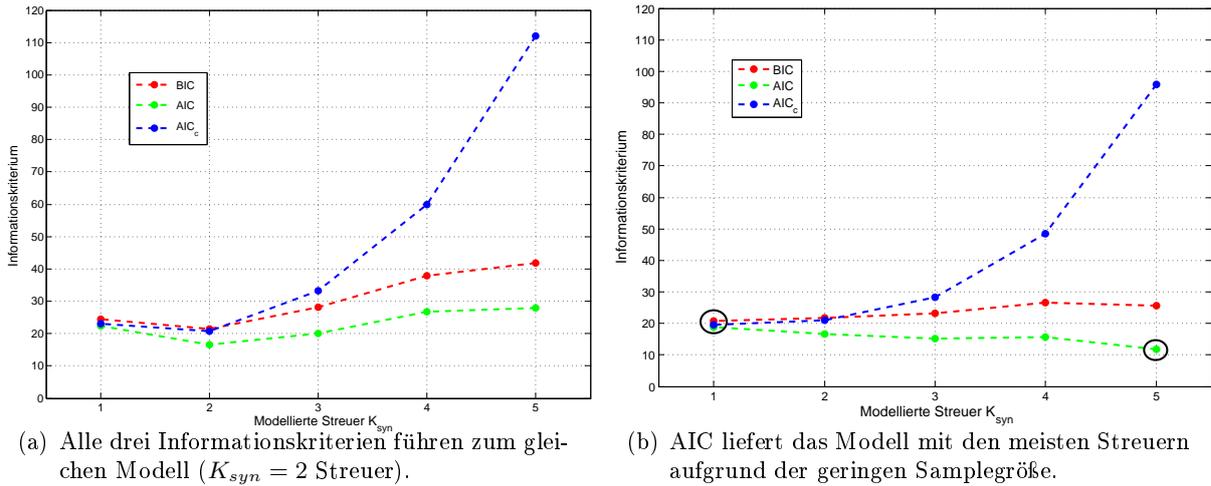
$I(f, g)$  ist die Information, die verlorengeht, wenn  $f(x)$  durch  $g(x|M_k)$  approximiert wird. Da die Wirklichkeit  $f(x)$  nicht bekannt ist, kann dieses Maß nicht direkt berechnet werden. Somit ist eine Approximation von  $I(f, g)$  nötig. Dies stellt das AIC dar. Da die Samplegröße im Verhältnis zu den Modellparametern gering ist, ist die Approximation der Kullback-Leibler-Information durch den AIC ungenau [2]. Abhilfe schafft eine Erweiterung des AIC durch Sugiura sowie Hurvich und Tsai [19]. Der erweiterte AIC, genannt  $AIC_c$ , berechnet sich wie folgt:

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{\eta - k - 1} \quad (4.10)$$

In [2] wird empfohlen, den erweiterten Ansatz  $AIC_c$  anstatt des normalen  $AIC$  zu nutzen, wenn das Verhältnis aus Samplegröße zu Modellparametern kleiner als 40 ist:

$$\{AIC|AIC_c\} = \begin{cases} AIC & \text{für } \frac{\eta}{k} \geq 40 \\ AIC_c & \text{für } \frac{\eta}{k} < 40 \end{cases} \quad (4.11)$$

Im Rahmen dieser Masterarbeit beträgt das Verhältnis maximal  $\frac{\eta}{k} = \frac{P}{k_{max}} = \frac{20}{2} = 10$ . Somit wird das  $AIC_c$  verwendet.  $BIC$  und  $AIC_c$  haben gemeinsam, dass sie die Anzahl der Samples, hier die Anzahl der Aufnahmen, berücksichtigen. Abbildung 4.3(a) zeigt ein Beispiel, bei dem alle drei Informationskriterien das gleiche Modell auswählen. Abbildung 4.3(b) hingegen zeigt den Einfluss der Samplegröße.  $AIC_c$  und BIC liefern das Modell mit einem Streuer, das AIC tendiert hingegen zu dem Modell mit 5 Streuern (schwarze Markierungen in Abbildung 4.3(b)).



**Abb. 4.3:** Vergleich der Informationskriterien.

Durch die Modellselektion findet ein Übergang zu der Untersuchung von synthetischen Signalen statt. Ist das wahrscheinlichste Modell gefunden, wird in den folgenden Schritten das synthetische Signal mit  $K_{syn}$  Streuern verwendet, um den Einfluss von Rauscheinflüssen zu minimieren.

## Kapitel 5

# Plausibilitätskriterien

In Bezug auf die TomoSAR-Prozessierungskette liegt nun für eine Auflösungszelle ein Reflexionsprofil vor, auf das, je nach Wahl der Inversionsmethode, die Modellselektion angewendet wurde. Die in Kapitel 3 vorgestellten Ansätze sollen bewertet und miteinander verglichen werden. Dafür bedarf es objektiver Kriterien. Ein solches Kriterium ist die Plausibilität. Dieser Begriff ist je nach Anwendungsgebiet verschieden definiert:

1. Vergleich der Auflösungsfähigkeit der Inversionsansätze bei einer festgelegten Basislinienverteilung und
2. Bewertung hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit aller Streuer entlang eines Profils mit Hilfe von Nachbarschaftsinformationen

Der erste Ansatz basiert auf statistischen Größen und kann nur auf einzelne Auflösungszellen und bei gegebenen Soll-Elevationen angewendet werden. Der zweite Ansatz eignet sich für Realdaten (Soll-Elevationen unbekannt) und basiert auf dem Vergleich der Nachbarschaft entlang eines Profils. Dafür wird von der Betrachtung auf Pixelebene auf die Betrachtung auf Profilebene übergegangen.

### 5.1 Statistische Größen

Bei gegebener Basislinienkonfiguration und bekannter Soll-Position genau eines Streuers ist die 3 dB-Breite der Impulsantwort ein mögliches Bewertungskriterium. Die 3 dB-Breite beschreibt die Breite an der Stelle der Hauptkeule, an der die Energie um die Hälfte abgefallen ist. Eine geringe 3 dB-Breite bedeutet eine schlanke Kurve der Impulsantwort eines Streuers und somit eine hohe Auflösung. Als weiteres Bewertungskriterium bietet sich das „Peak-to-sidelobe-ratio“ (PSLR), also das Verhältnis von Maximum zum ersten Nebenkeulenmaximum, an [13], [25]. Der theoretische Bestfall für das Ergebnis eines Inversionalgorithmus ist ein Dirac-Stoß bei der entsprechenden Elevation, der aufgrund der endlichen Basislinienausdehnung und Rauschen in den Messdaten jedoch nicht zu erwarten ist. Abbildung 5.1 zeigt diese beiden Bewertungskriterien für einen Streuer schematisch. Je kleiner die 3 dB-Breite ist, desto kleiner ist auch die Differenz zwischen zwei Streuern, die der Algorithmus auflösen kann. Für eine gegebene Basislinienkonfiguration und einen Streuer können die verschiedenen Inversionsalgorithmen,

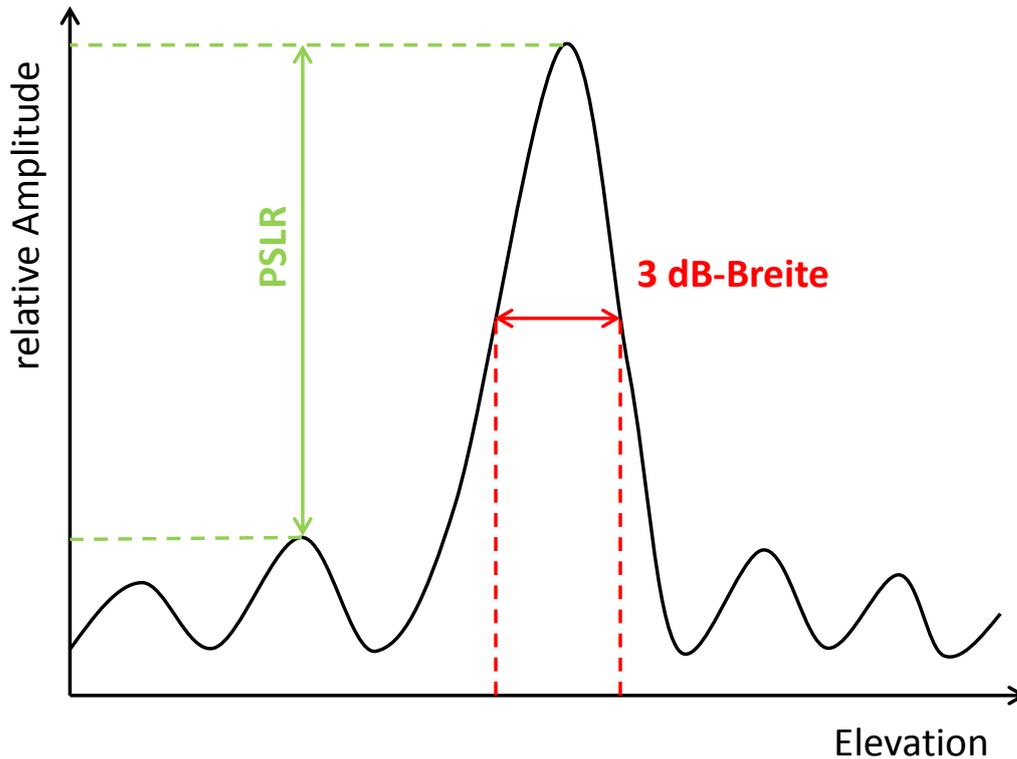


Abb. 5.1: Schema der Bewertungskriterien PSLR und 3dB-Breite.

die ein kontinuierliches Reflexionsprofil erzeugen, anhand dieser beiden Kriterien verglichen werden.

Was aber passiert im Falle **mehrerer Streuer** in einer Auflösungszelle? Wie in Kapitel 2.3 beschrieben, ist die Impulsantwort bei ungleichmäßigen Basislinien und Vorhandensein von Rauschen nicht trivial. Die Anteile zweier Streuer am gesamten Reflexionsprofil vermischen sich in Abhängigkeit der Basislinienkonfiguration und dem Messrauschen. Primär ist nicht die Form des zu einem Streuer gehörenden Maximums von Interesse, sondern die Trennbarkeit zweier oder mehrerer Streuer untereinander. Genau an dieser Stelle setzt das im Folgenden beschriebene Plausibilitätskriterium an.

Das rekonstruierte Radarsignal mehrerer Streuer ist die Summe der Einzelbeiträge aller  $K$  Streuer (vgl. Gleichung 2.16). Im Falle gleichabständiger Basislinien und der Abwesenheit jeglichen Rauschens ist dies die Summe von  $K$  Sinc-Funktionen. Als gute Näherung einer Sinc-Kurve kann im inneren Bereich des Maximums eine Gauß-Kurve angenommen werden. Eine Gauß-Kurve kann einfach parametrisiert werden und ist durch drei Parameter eindeutig bestimmt:

$$f(x) = A \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (5.1)$$

Auch andere parametrisierbare Kurven sind vorstellbar wie beispielsweise Parabeln oder Splines. In dieser Masterarbeit werden Gauß-Kurven verwendet, da ihre Parameterisierung physikalischen Größen zugeordnet werden kann:  $A$  stellt die Amplitude („Höhe“),  $\mu$  den Mittelwert („Position des Maximums auf x-Achse“, Elevation) und  $\sigma^2$  die Varianz („Breite“) dar.

Je nach Auflösungsvermögen der Inversionsalgorithmen ist es möglich zwei verschiedene Streuer voneinander zu unterscheiden. Je näher ihre Elevationen beieinander liegen, desto geringer wird diese Auflösungswahrscheinlichkeit. Der Ansatz dieses Plausibilitätskriteriums ist es, in jedes Maximum des rekonstruierten Signals eine Gauß-Kurve zu schätzen und anschließend auf Grundlage der Approximationsgüte zu entscheiden, ob zwei benachbarte Maxima korrekt aufgelöst werden. Nur wenn dies der Fall ist, werden die beiden Maxima als getrennte Streuer behandelt.

Die Amplitude  $A$  sowie der Mittelwert  $\mu$  der zu schätzenden Gauß-Kurve sind bekannt und bis auf einen Unsicherheitsbereich auf die Sollwerte festgelegt. Die Amplitude kann dabei Werte zwischen 0,7 und 1,0 annehmen, was damit begründet ist, dass nur lokale Maxima in diesem Bereich als dominante Streuer angesehen werden.

$$A = 0,7 \dots 1,0 \quad (5.2)$$

Da nicht die Amplitude im rekonstruierten Profil sondern lediglich die Position des Maximums auf der Elevationsachse von Interesse ist, geht die Amplitude der angenäherten Gauß-Kurve nicht in das Plausibilitätsmaß mit ein. Der Mittelwert  $\mu$  ist bis auf eine Toleranz von  $\pm 1 m$  auf die Sollelevation festgelegt. Dieser Toleranzbereich resultiert aus den Effekten der Überlagerung mehrerer Streuer. Das lokale Maximum ist dann zum anderen Streuer hin verschoben. Der Wert hängt zum einen von der erreichbaren Auflösung  $\delta_s$  und zum anderen vom Abstand zum nächstgelegenen Streuer ab. Im Rahmen dieser Masterarbeit wird der Toleranzbereich auf  $\pm 1 m$  um die Sollelevation festgesetzt. Der wichtigste Parameter für die Anpassungsgüte ist die Varianz  $\sigma^2$ . Physikalisch entspricht dies der Breite der Hauptkeule des Streuers. Eine große Varianz entspricht einer großen Ausbreitung in Elevationsrichtung des Streuers. Der für das Schätzen der Gauß-Kurven verwendete Trust-Region-Algorithmus erlaubt das Festlegen von oberen und unteren Schranken für die drei Parameter und wird in [5] beschrieben.

Der Varianzparameter ist nach oben hin beschränkt. Dies soll verhindern, dass bei einem Zusammenfließen von zwei Maxima im rekonstruierten Signal eine zu breite, geschätzte Gauß-Kurve das Summensignal der beiden Maxima gut approximiert. Wie in 2.3 beschrieben, ist die Auflösung und somit die Breite der Streuer im Reflexionsprofil durch die Rayleigh-Grenze  $\delta_s$  limitiert. Somit ist im Vornherein bekannt, welchen Wertebereich die Varianz annehmen kann:

$$\sigma^2 = (0 \dots \delta_s)^2 \quad (5.3)$$

Das eigentliche Plausibilitätsmaß ist die gemeinsame Quadratsumme der Residuen aus bestangepasster Gauß-Kurve und dem rekonstruierten Signal für zwei Streuer. Die Quadratsumme der Residuen zwischen Gauß-Kurve  $f(x)$  und Reflexionsprofil  $\gamma$  für einen Streuer wird im Folgenden als SSR (Squared Sum of Residuals) bezeichnet. Je kleiner der SSR-Wert ist, desto besser wird das Signal durch die Gauß-Kurve approximiert. Wenn dies der Fall ist, entspricht der Mittelwert der Gauß-Kurve der Elevation des lokalen Maximums sowie die Amplitude der Gauß-Kurve der relativen Amplitude des rekonstruierten Signals. Ist der SSR hingegen groß, so ist die Approximationsgüte der Gauß-Kurve gering. Die äußeren Schranken der drei Parameter verhindern eine bessere Anpassung der Gauß-Kurve an die gegebenen Daten.

Das Plausibilitätsmaß  $P_{stat}$  setzt sich also aus den beiden SSR der Streuer zusammen, deren Trennbarkeit bewertet werden soll:

$$P_{stat} = SSR_1 + SSR_2 \quad (5.4)$$

$$\text{mit: } SSR_i = \sum_{j=1}^N (\gamma_j - f(x_j))^2 \quad (5.5)$$

wobei  $N$  hier die Anzahl der Stellen beschreibt, an denen die Differenz berechnet wird. Im Fall von zwei durch den Rekonstruktionsalgorithmus nicht aufgelösten Streuern ist das Eingangssignal die Überlagerung zweier Kurven. Die beiden einzeln in die Daten geschätzten Gauß-Kurven können das Eingangssignal nun nicht mehr gut approximieren, was sich in einem hohen SSR widerspiegelt. Es kann somit ein Schwellwert für den SSR festgelegt werden, ab wann zwei Streuer als vom Rekonstruktionsalgorithmus nicht mehr aufgelöst gelten.

Fallen zwei Streuer auf die nahezu identischen Elevationen  $s_1$  und  $s_2$ , resultiert das in einem rekonstruierten Signal, welches nicht von dem eines Streuers mit der Elevation  $(s_1 + s_2)/2$  zu unterscheiden ist. Somit ergibt sich ein sehr kleiner SSR-Wert. Das Plausibilitätsmaß wird daher um einen Term, der den Abstand der beiden Mittelwerte  $\Delta\mu$  einbezieht, erweitert:

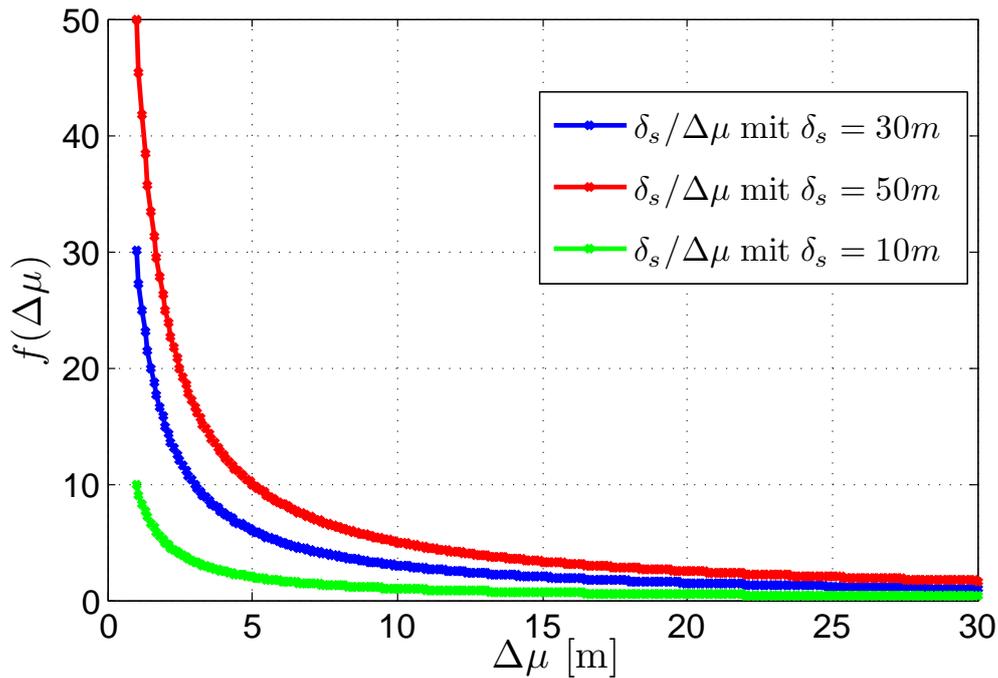
$$P_{stat} = SSR_1 + SSR_2 + f(\Delta\mu) \quad (5.6)$$

Auch  $f(\Delta\mu)$  hängt von der Rayleigh-Grenze ab, da bei einer längeren Basislinie auch nahe beieinander liegende Streuer noch aufgelöst werden können. Ist der Abstand der Streuer groß, so soll  $f(\Delta\mu)$  klein sein. Ist die Rayleigh-Grenze gering, so soll auch  $f(\Delta\mu)$  gering sein. Der einfachste funktionelle Zusammenhang, der diesem Verhalten entspricht, ist der Quotient beider Größen:

$$f(\Delta\mu) = \frac{\delta_s}{\Delta\mu} \quad (5.7)$$

Abbildung 5.2 zeigt das Verhalten der gewählten Abstandsfunktion. Für große Differenzen der Mittelwerte  $\Delta\mu$  ist der Funktionswert vernachlässigbar klein. In Abhängigkeit der Rayleigh-Grenze wird der Wert mit sinkendem Abstand schnell größer und erhöht das Plausibilitätskriterium  $P_{stat}$  damit erheblich. Die eigentliche Approximationsgüte SSR verliert in diesem Fall relativ gesehen an Einfluss.

Für  $k$  Streuer kann nun eine symmetrische Matrix der Dimension  $[k \times k]$  aufgestellt werden, die die Plausibilitätsmaße für alle  $(k \cdot (k - 1))/2$  Kombinationen enthält. Dabei enthält das Matrixelement  $[i,j]$  den Plausibilitätswert für die Trennbarkeit der Streuer  $i$  und  $j$ . Die verbleibende Schwierigkeit besteht in der Festlegung des Schwellwertes für  $P_{stat}$  ab dem zwei Streuer als nicht mehr getrennt angesehen werden können. Hier ist nochmals hervorzuheben, dass die Gauß-Kurve keine physikalische Bedeutung hat, sondern lediglich eine Approximation des Reflexionsprofils rund um das Maximum darstellt. Daher gestaltet sich die Festlegung eines physikalisch begründeten Schwellwertes schwierig. Eine empirische Analyse im Rahmen dieser Masterarbeit zeigt, dass ein Wert von  $P_{stat} \approx 1,2 \dots 1,5$  verlässliche Ergebnisse liefert. Diese Werte wurden ermittelt, indem zwei Streuer bei sonst bekannten Parametern immer weiter aufeinander zubewegt und dabei das Plausibilitätsmaß ständig berechnet wurde. Der Wert an dem Punkt, wo sich das Spektrum von zwei Maxima zu einem zusammenfließt, ist der Punkt, an dem keine zwei Maxima mehr trennbar sind. Dies entspricht dem genannten Wert von etwa 1,2 bis 1,5. Beim Vergleich mehrerer Rekonstruktionsalgorithmen untereinander, lässt sich mit



**Abb. 5.2:** Funktion der Mittelwertdifferenz  $f(\Delta\mu)$  in Abhängigkeit der Rayleigh-Grenze, beispielhaft für drei Rayleigh-Grenzen.

diesem Wert die Trennbarkeit der Streuer ordinal einordnen. Ein kleiner Wert bedeutet gute Trennbarkeit, ein großer Wert schlechte Trennbarkeit.

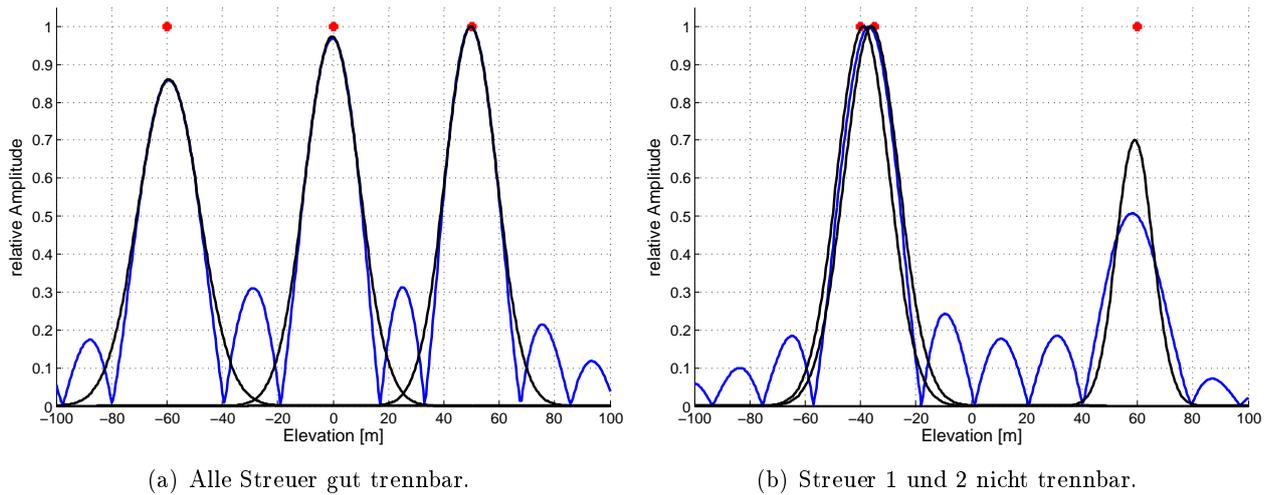
Dieses Plausibilitätsmaß bewertet nicht die Auflösungseigenschaft des Rekonstruktionsalgorithmus für einen einzelnen Streuer. Hierfür gibt es die zu Beginn dieses Kapitels beschriebenen Methoden (3 dB-Breite, PSLR). Da diese Verfahren bei zwei und mehr Streuern und somit bei einer Überlagerung der Streuer im Reflexionsprofil nicht mehr anwendbar sind, bietet das hier vorgestellte Verfahren eine Quantisierung und Vergleichbarkeit der Trennbarkeit zweier Streuer. Das Kriterium liefert einen Zahlenwert, der den visuellen Eindruck beschreibt, ob zwei Streuer in einem Reflexionsprofil trennbar sind oder nicht. Das folgende Beispiel soll eine praktische Anwendung des entwickelten Plausibilitätsmaßes sowie die Entsprechung des Kriteriums mit dem visuellen Eindruck zeigen.

### 5.1.1 Anwendungsbeispiel

Abbildung 5.3(a) zeigt ein Beispiel für das Reflexionsprofil dreier Streuer mit den Elevationen  $s_1 = -60 m$ ,  $s_2 = 0 m$ ,  $s_3 = +50 m$ . Das Reflexionsprofil wurde mittels TSVD berechnet. Die dazugehörige Plausibilitätsmatrix  $P_{stat}$  sieht wie folgt aus:

$$P_{stat} = \begin{bmatrix} 0 & 0,394 & 0,1862 \\ 0,3394 & 0 & 0,4083 \\ 0,1862 & 0,4083 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Der visuelle Vergleich zeigt, dass alle Signalanteile gut getrennt werden können. Die Werte in  $P_{stat}$  sind alle deutlich kleiner als der empirische Schwellwertbereich von 1,2 bis 1,5. Demgegen-



**Abb. 5.3:** Beispiele für Trennbarkeiten. Blau: Mittels TSVD rekonstruiertes Reflexionsprofil. Schwarz: Approximierende Gauß-Kurven der drei Streuer. Rot: Sollpositionen der Streuer.

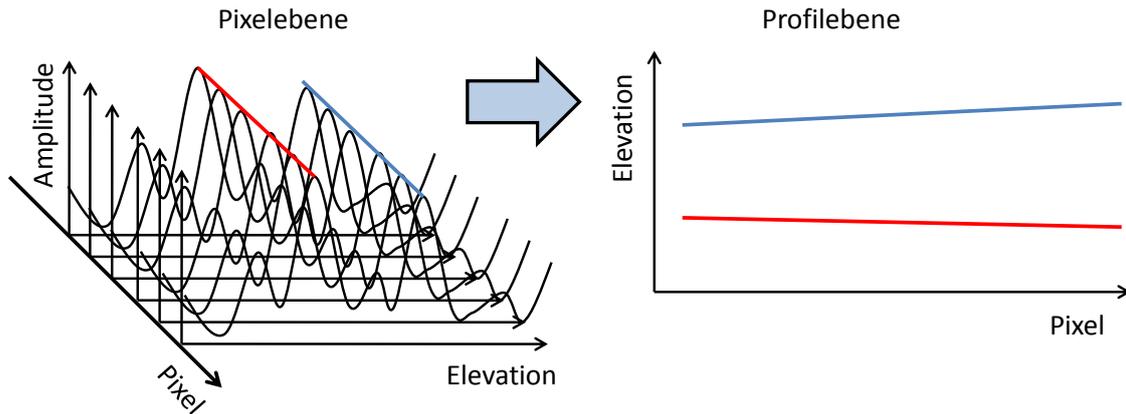
über steht das folgende Beispiel mit den drei Streuern  $s_1 = -40\text{ m}$ ,  $s_2 = -35\text{ m}$ ,  $s_3 = +60\text{ m}$ . Abbildung 5.3(b) zeigt das Zusammenfallen der Maxima der beiden Streuer  $s_1$  und  $s_2$ . Die dazugehörige Plausibilitätsmatrix sieht wie folgt aus:

$$P_{stat} = \begin{bmatrix} 0 & 4,4134 & 1,0306 \\ 4,4134 & 0 & 0,8486 \\ 1,0306 & 0,8486 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Das Matricelement [1,2] enthält einen Wert, der deutlich über dem Schwellwertbereich liegt. Der hohe Wert kommt zustande, da die Approximationsgüten zwar hoch sind (vgl. schwarze Kurven decken sich gut mit der blauen), der vom Abstand abhängige Term  $f(\Delta\mu)$  ist hingegen groß. Der Rekonstruktionsalgorithmus ist also nicht in der Lage, die Streuer  $s_1$  und  $s_2$  aufzulösen. Die Trennbarkeit von  $s_1$  und  $s_3$  sowie  $s_2$  und  $s_3$  ist jedoch gegeben (Werte in  $P_{stat} < 1,2$ ). Hierbei muss jedoch der Fehler in der Elevation beachtet werden, da sich das Maximum zwischen Streuer 1 und 2 befindet. Im Realdatenfall hieße das, dass bei dem gegebenen Signal und Rekonstruktionsansatz nur zwei der drei Streuer detektiert werden können.

Abbildung 5.3(b) zeigt außerdem den Einfluss der Amplitudennormierung. Das Maximum des Streuers  $s_3 = 60\text{ m}$  hat eine relative Amplitude im rekonstruierten Signal von etwa 0,5 und ist gegenüber der Sollposition um etwa 2m in Richtung der anderen beiden Streuer verschoben. Beide Effekte kommen durch die Überlagerung aller Signalanteile und die anschließende Normierung zustande. Die Überlagerung und die damit verbundenen Fehler sind Charakteristiken aller Inversionsansätze, die auf der Spektralzerlegung beruhen.

Das auf der Signalstatistik basierende Plausibilitätskriterium ist aufgrund der benötigten Soll-Elevationen nur für synthetische Daten verwendbar. Ein denkbare Anwendungsszenario wäre beispielsweise die Anwendung auf SAR-Daten eines Gebäudes, dessen Streueigenschaften bekannt sind (beispielsweise durch Zuordnung der Persistent Scatterer zu den entsprechenden Gebäudestrukturen mit Hilfe von optischen Bildern). Weitere ausführliche Ergebnisse für die Anwendung dieses Plausibilitätsmaßes folgen im Kapitel 6.



**Abb. 5.4:** Schematische Darstellung des Übergangs von der Betrachtung einzelner Reflexionsprofile auf Elevationsprofile.

## 5.2 Nachbarschaftsbeziehung

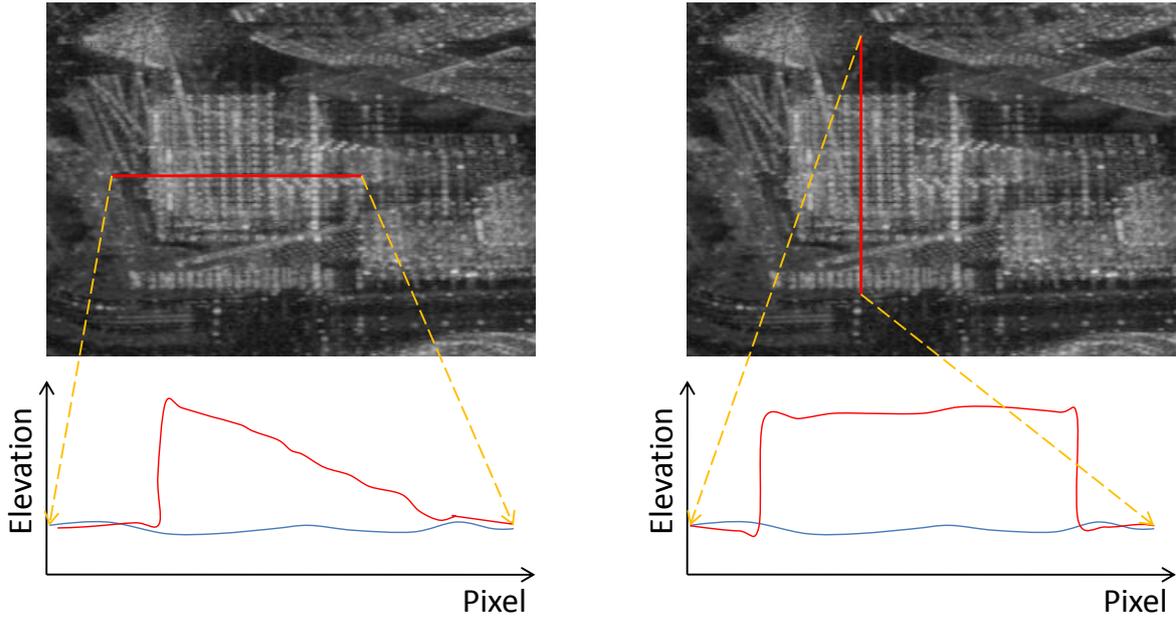
Für den folgenden Ansatz wird von der bisherigen Betrachtung einzelner Reflexionsprofile übergegangen auf die Betrachtung mehrerer benachbarter Reflexionsprofile. Das sich dadurch ergebene Profil wird Elevationsprofil genannt. Abbildung 5.4 zeigt dies schematisch.

In urbanen Gebieten kann davon ausgegangen werden, dass Layovergebiete mit Auflösungszellen geringer Amplitudendispersion hauptsächlich durch aufsteigendes Mauerwerk verursacht werden. Dieses kann im Normalfall als Ebene im Raum approximiert werden. Ein Profil, also ein Geradenabschnitt, über eine Ebene wird durch die Abbildungsgeometrie des SAR-Sensors wiederum als Geradenabschnitt abgebildet (siehe Kapitel 2.3). Die Gerade kann je nach Orientierung des Gebäudes zum Sensor gedreht sein. Abbildung 5.5 zeigt zwei schematische Profile und die Orientierung der entsprechenden Geraden, die die Bebauung repräsentieren und in den Elevationsprofilen wiederzufinden sind. Es ist ersichtlich, dass benachbarte Punkte entweder eine sehr ähnliche Elevation oder eine ähnliche Steigung aufweisen. Die Steigung  $m$  bezeichnet hier den Quotienten aus Elevationsunterschied  $\Delta s$  und Pixelabstand  $\Delta l$

$$m = \frac{\Delta s}{\Delta l}. \quad (5.10)$$

Da wegen einer unzureichenden Amplitudendispersion (vgl. Kapitel 2.5) nicht für jeden Punkt im Profil auch eine Reflexionsfunktion vorliegt, muss der Pixelabstand in die Berechnung der Steigung mit einbezogen werden. Das Plausibilitätskriterium der Nachbarschaftsbeziehung beruht also auf der Annahme, dass benachbarte Auflösungsstellen entlang einer Geraden im Objektraum Maxima ähnlicher Elevationen aufweisen.

Diese Nachbarschaftsbeziehung wird nun zur Definition des Plausibilitätskriteriums genutzt. Die Anwendung des Plausibilitätskriteriums ist hier jedoch nicht die Validierung des Rekonstruktionsalgorithmus, sondern dient als Auswahlkriterium von Elevationspunkten innerhalb der TomoSAR-Prozessierung. Nach diesem Plausibilitätskriterium wahrscheinliche Punkte sind eher das Ergebnis eines tatsächlich vorhandenen Streuers mit der entsprechenden Elevation als ein aufgrund von Rauschen fälschlich detektierter Streuer. Dies gilt unter der Annahme, dass das Profil über eine Struktur im Objektraum gelegt wurde, die als Gerade im SAR-Bild



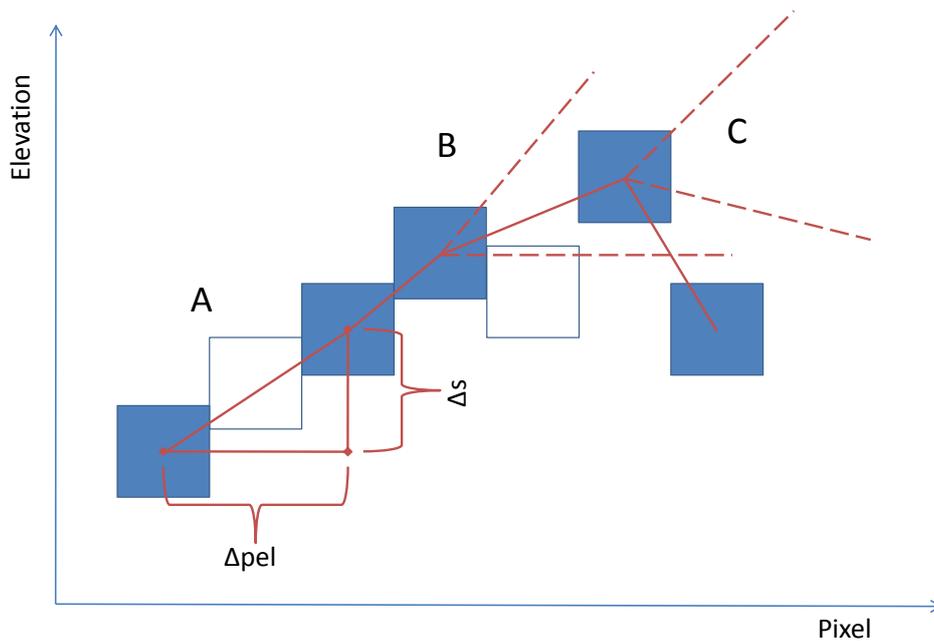
**Abb. 5.5:** Schema zweier theoretischer Profile über Layoverbereich. Links: Profil orthogonal zur Azimutrichtung. Rechts: Profil in Azimutrichtung. Blau: Signal vom Boden. Rot: Signal vom Mauerwerk.

erscheint. Eine geringe Wahrscheinlichkeit heißt jedoch nicht, dass der entsprechende Streuer nicht wirklich existiert, sondern lediglich, dass er wahrscheinlich nicht zu einer angenommenen Gerade gehört. Die apriori-Annahme, dass Gebäudestrukturen hauptsächlich als Geraden abgebildet werden, ist somit grundlegend.

Für jeden Streuer  $k$  einer Auflösungszelle wird ein Plausibilitätswert berechnet. Dafür werden die Steigungen der zwei Pixel vor und hinter  $k$  zum jeweils nächsten Pixel bestimmt. Da jede Auflösungszelle mehrere Streuer enthalten kann, lautet die erste Fragestellung, zu welchem Streuer in der Folgezelle die Steigung berechnet wird. Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden alle Streuer der Folgezelle für die Berechnung des Plausibilitätsmaßes verwendet. Dies ist möglich, wenn man die Annahme aufstellt, dass zwei Streuer in einer Zelle wegen der geringen Auflösung des Inversionsalgorithmus nicht so nah beieinander liegen, dass sie zwei verschiedenen Geraden zugeordnet werden können. Ein weiterer Ansatz könnte sein, nur den Streuer auszuwählen, der am nächsten an der Gerade liegt, die die ersten beiden Streuer vor  $k$  und für die Berechnung verwendeten Streuer zusammen bilden. Sind die zwei Streuer vor und zwei Streuer hinter  $k$  identifiziert, wird die Standardabweichung der Steigungen berechnet:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} (m_i - \bar{m})^2} \quad (5.11)$$

wobei  $\bar{m}$  den Mittelwert aller Steigungen zwischen den fünf Pixeln beschreibt. Die Aussagekraft der Standardabweichung ist bei einer Stichprobenmenge von  $N_k = 5$  noch gering. Dies muss bei der späteren Bewertung berücksichtigt werden. Eine stabilere Standardabweichung würde durch eine Ausdehnung des Berechnungsbereiches der Gerade erreicht werden. Jedoch muss auch darauf geachtet werden, dass die einzelnen Geradenabschnitte nicht zu groß werden, damit sie die Gebäudestrukturen noch fein genug approximieren können.



**Abb. 5.6:** Schema des Plausibilitätskriteriums Nachbarschaft. Blau: verwendete Pixel. Weiß: wegen  $D_A$  nicht verwendete Pixel. Rot gestrichelt: Toleranzbänder.

Abbildung 5.6 zeigt das Verfahren vereinfacht, da nur von je einem Streuer pro Auflösungszelle ausgegangen wird. Teil A zeigt die Berechnung der Steigung  $m$ , die auch negativ sein kann. Die nicht ausgefüllten Quadrate sollen Pixel symbolisieren, die aufgrund einer zu geringen Amplitudendispersion  $D_A$  (vgl. Kapitel 2.5) aussortiert wurden. Für jedes Pixel wird die Steigung zu den zwei vorherigen sowie den zwei folgenden Pixeln berechnet. Da die Steigung nur in Ausnahmefällen wirklich exakt gleich ist, wird ein Toleranzwinkel  $\delta m$  um die vorherige Steigung gelegt. Die Steigung  $m_i$  des momentan betrachteten Streuers  $k_i$  ist dann gültig wenn gilt:

$$m_{i-1} - \delta m \leq m_i \leq m_{i-1} + \delta m \quad (5.12)$$

Teil B in Abbildung 5.6 zeigt diesen Toleranzwinkel gestrichelt. Das nächste, nicht aussortierte Pixel liegt innerhalb des Toleranzwinkels und wird somit als gültige Steigung akzeptiert. In Teil C liegt das folgende nicht aussortierte Pixel außerhalb des Toleranzwinkels und wird deshalb nicht als Pixel mit gültiger Steigung angesehen.

Für jedes Pixel wird dieser Test für die zwei vorherigen sowie die folgenden zwei Pixel durchgeführt. Liegt eine nach Gleichung (5.12) gültige Steigung vor, wird eine Variable  $V$  für die Bewertung inkrementiert. Liegen fünf aufeinander folgende Pixel auf einer Geraden, kann diese Variable eines getesteten Pixels demnach maximal viermal inkrementiert werden. Dies ist neben dem Toleranzwinkel eine Stellschraube für die Konfiguration des Plausibilitätskriteriums. Damit ein Streuer  $k$  als plausibel gilt, muss die folgende Bedingung gelten:

$$V \geq \Gamma_V \quad (5.13)$$

Erneut gilt es, allgemeingültige Werte für die Schwellwerte  $\delta m$  und  $\Gamma_V$  zu finden. Es ist ersichtlich, dass beide Schwellwerte miteinander korreliert sind, da  $V$  nur inkrementiert wird, wenn die Abweichung der Steigung zwischen zwei Streuern benachbarter Pixel gegenüber der Steigungen der anderen Streuer klein ist. Dies ist gleichbedeutend mit einer geringen Standardabweichung. Daher soll  $\delta m$  eine Funktion von der nach (5.11) berechneten Standardabweichung sein:

$$\delta m = f(\sigma_m) \quad (5.14)$$

In der einfachsten Form wurde  $\delta m = 2 \cdot \sigma_m$  gewählt. Da keine weiteren Informationen über das Rauschen der Elevationen bekannt sind, wird normalverteiltes Rauschen angenommen. Das bedeutet, dass bei der Toleranz von  $\delta m = 2 \cdot \sigma_m$  rund 95%, gleichbedeutend mit drei Pixeln, auf der Geraden liegen. Hinzu kommt, dass die Toleranzsteigung auf die Steigung des Vorgängers addiert wird. Somit wird der Toleranzbereich lokal angepasst.

Die Menge der sinnvollen Möglichkeiten für die Wahl von  $\Gamma_V$  ist begrenzt. Maximal kann  $\Gamma_V = 4$  betragen. Gute Ergebnisse zeigten sich für  $\Gamma_V = 2$ . Das bedeutet, dass mindestens zwei Streuer innerhalb der lokalen Nachbarschaft um  $k$  eine gültige, also ähnliche, Steigung aufweisen müssen. Diese Wahl ist robust genug gegenüber Ausreißern, aber streng genug um Streuer, die einer Geraden angehören, zu identifizieren. Auch hier folgt ein kurzes Anwendungsbeispiel zur Darstellung des auf der lokalen Nachbarschaft basierenden Plausibilitätskriteriums.

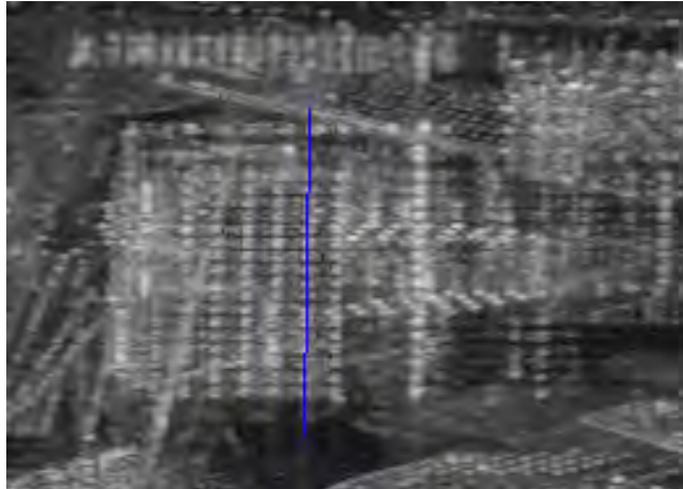
### 5.2.1 Anwendungsbeispiel

Ein Profil der Länge 129 Pixel wird über ein achtstöckiges Gebäude gelegt (Abbildung 5.7). Die Inversion geschieht mittels Beamforming. Anschließend wird eine Modellselektion durchgeführt. Abbildung 5.8 zeigt das vorläufige Ergebnis. Ein starkes Signal vom Boden sowie der Gebäudefassade kann rekonstruiert werden. Neben den Signalen von Boden und Fassade sind auch scheinbar willkürliche Streuer in den Daten. Unter der Annahme, dass hauptsächlich die Geraden in den Daten interessant sind, wird nun die Nachbarschaftsbeziehung genutzt, um diese zu extrahieren. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.9 zu sehen.

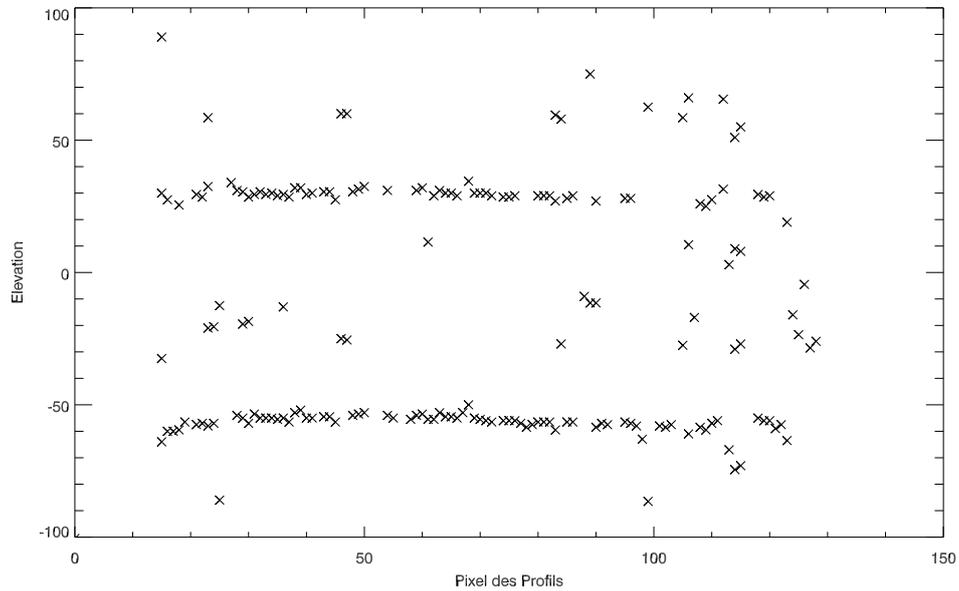
Die Profilmomente der Geraden am Boden sowie der Fassade werden erhalten, die Einzelstreuer werden fast vollständig entfernt. Jedoch werden auch Streuer verworfen, die bei der visuellen Validierung als gültig erkannt werden. Nochmals hingewiesen werden soll hier darauf, dass verworfene Streuer keine „Ausreißer“ im statistischen Sinne sind, sondern nur vor dem Hintergrund der Extraktion von Geraden so bezeichnet werden können.

## 5.3 Diskussion der vorgestellten Plausibilitätskriterien

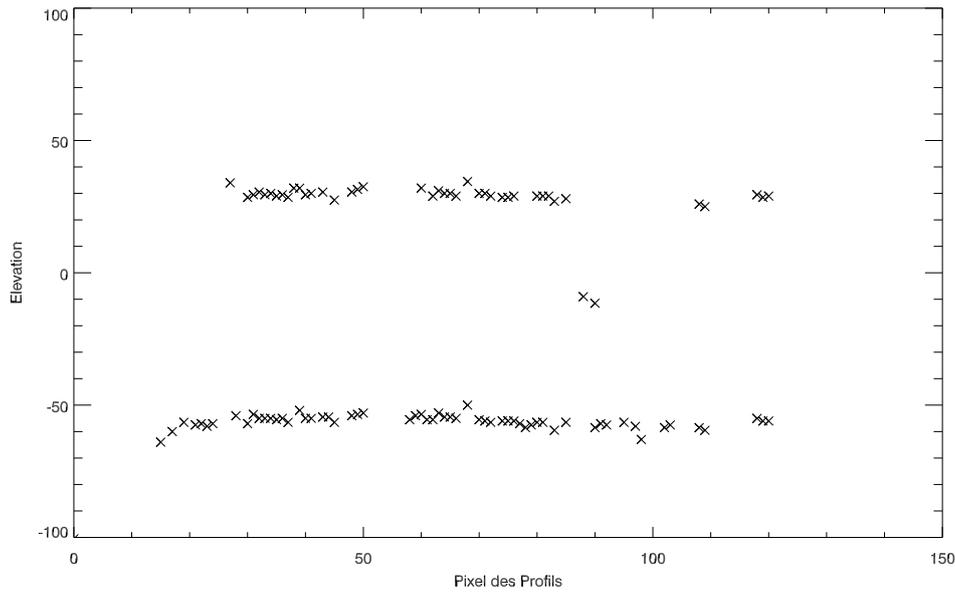
Beide Plausibilitätskriterien bewerten die Plausibilität der Ergebnisse der Rekonstruktionsalgorithmen. Während das auf der Statistik einer einzelnen Auflösungszelle basierende Verfahren die Soll-Elevationen benötigt, wird eine Plausibilität im zweiten Verfahren aus der Nachbarschaft abgeleitet. Daher ergeben sich auch unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten der beiden Verfahren. Das auf der Pixelebene anzuwendende Verfahren liefert einen Ansatz für die Auflösungsbewertung mittels der Trennbarkeit aller Streuer in einer Auflösungszelle. Bei einer festen gegebenen Basislinienverteilung und gleichbleibenden Streuerpositionen können



**Abb. 5.7:** Amplitudenbild mit Profil über Hochhaus Ludwig-Beck-Straße.



**Abb. 5.8:** Elevationsprofil über Hochhaus Ludwig-Beck-Straße (Vgl. Abbildung 5.7). Modellselektion aktiviert. Keine Plausibilitätsprüfung.



**Abb. 5.9:** Profil über Hochhaus Ludwig-Beck-Straße (Vgl. Abbildung 5.7). Modellselektion aktiviert. Plausibilitätsprüfung aktiviert.

die verschiedenen Inversionansätze miteinander verglichen werden. Das Plausibilitätsverfahren sagt nichts über die Auflösungsfähigkeit für den Fall eines einzelnen Streuers aus. Stattdessen liefert es einen Zahlenwert, der dem visuellen Eindruck der Trennbarkeit entspricht. Damit ist es möglich, eine objektive Einordnung der vorgestellten Inversionsansätze für verschiedene Aufnahmesituationen durchzuführen. Das Kriterium kann genutzt werden, um die Abhängigkeit der Inversionsalgorithmen von Rauschen, einer veränderten Basislinienkonfiguration und veränderten Streuerpositionen zu bewerten. Ist mit diesem Verfahren eine Aussage getroffen, welches Verfahren unter welchen Bedingungen das beste Ergebnis liefert, kann eine Analyse auf Profilebene folgen.

Mit dem auf Nachbarschaftsbeziehungen basierendem zweiten Plausibilitätskriterium lassen sich Ausreißer einer Geraden aufdecken und aus den Daten entfernen. Der Ansatz, Profile zur Plausibilitätsbewertung heranzuziehen kann auch für den Vergleich mit Ground-Truth-Daten angewendet werden. Ist beispielsweise der Abstand zweier deutlich in den SAR-Amplitudenbildern erkennbaren Fensterreihen bekannt, können zwei Profile über diese Fensterreihen gelegt werden. Nach Selektion der Punkte, die wahrscheinlich zu einer Geraden gehören, kann der mittlere Abstand der Geraden berechnet und mit den Ground-Truth-Daten verglichen werden. Beiden Verfahren gemeinsam ist, dass ein Schwellwert festgesetzt werden muss. Je nach den Daten, auf den die Algorithmen angewendet werden sollen, kann ein Schwellwert verschiedene Ergebnisse liefern. Im folgenden Kapitel werden Ergebnisse präsentiert, die die Anwendbarkeit der vorgestellten Plausibilitätskriterien belegen sollen.

## Kapitel 6

# Ergebnisse

Die einzelnen Schritte der TomoSAR-Prozessierungskette sollen nun bewertet und die verschiedenen Bewertungsansätze miteinander verglichen werden. Dabei wird zwischen zwei Arten von Daten unterschieden. Zunächst werden synthetische Daten geschaffen, die den Vorteil bieten, dass alle Parameter, wie die Streuerpositionen, das Rauschverhalten sowie die Basislinienkonfiguration, modellierbar sind. Anschließend werden Realdaten benutzt, die von 20 TerraSAR-X-Aufnahmen stammen.

### 6.1 Anwendung auf synthetische Daten

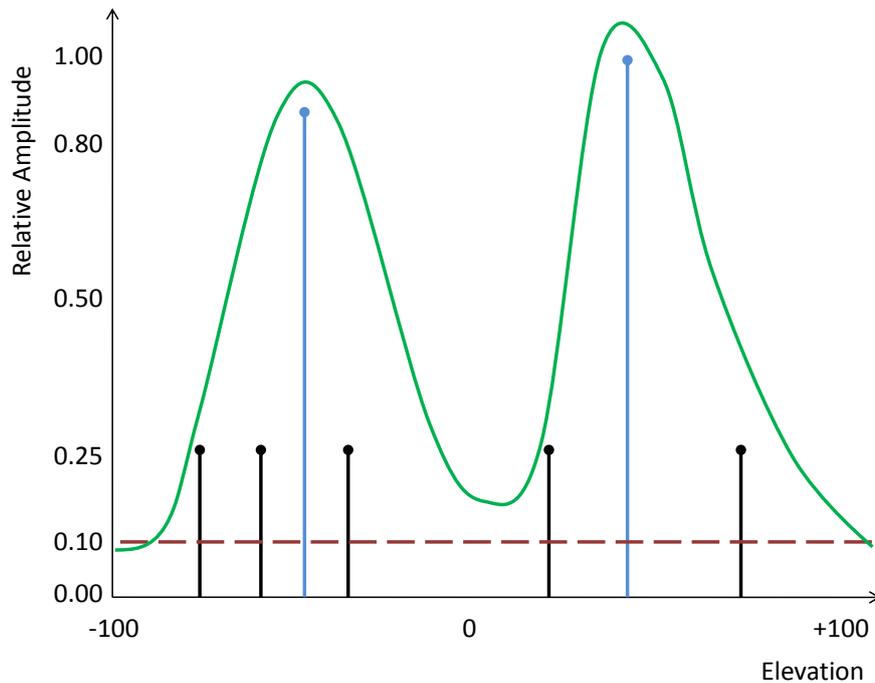
Zum Vergleich der verschiedenen Rekonstruktionsalgorithmen werden synthetische Daten generiert. Da hierbei die Elevationen exakt bekannt sind, lässt sich das Verhalten dieser Algorithmen auf veränderte Soll-Elevationen, Basislinien oder Rauschscenarien gut untersuchen. Obwohl alle Parameter kontrolliert werden können, sollen die verschiedenen Rekonstruktionsansätze letztendlich auf Realdaten angewandt werden. Somit sollen Daten synthetisiert werden, die möglichst nah an die Realität heranreichen.

Die Signalsynthesierung basiert auf der Formel (2.16) (Seite 18). Weiterhin sind die Parameter der Aufnahmegeometrie nötig. Bei ihrer Wahl wurde versucht, die Situation der vorliegenden Realdaten nachzubilden:

$b_{\perp}$	Vektor mit den 19 Basislinien des Realdatensatzes Berlin
$\lambda = 0,0311m$	Wellenlänge TerraSAR-X
$\bar{r} = 586219,04m$	mittlere Zielentfernung
$\gamma_k = 0,8\dots 1$	Amplituden der k Streuer. Je nach Experiment.
$s_k = -100 m\dots + 100 m$	Elevationen der k Streuer. Je nach Experiment.
$K = 1\dots 3$	Anzahl Streuer

#### 6.1.1 Rauschsimulation

Die einfache Synthetisierung von K Streuern reicht nicht aus, um die Rekonstruktionsalgorithmen sinnvoll zu vergleichen. Im Realdatenfall treten Störgrößen wie beispielsweise Resteinflüsse der Atmosphäre oder Orbitfehler auf. Außerdem sind neben den K dominanten Streuern



**Abb. 6.1:** Schema des Rauschmodells. Rot gestrichelt: Normalverteiltes Rauschen auf dem Gesamtsignal. Schwarz: 5 Streuer mit zufälliger Elevation. Blau:  $K = 2$  dominante Streuer, die rekonstruiert werden sollen. Grün: Summensignal aller Anteile.

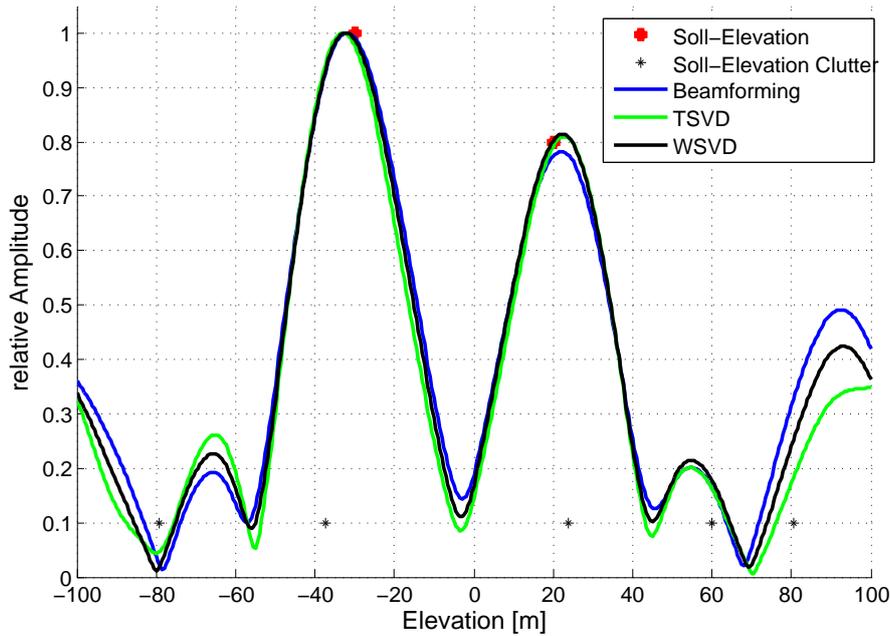
die Signalanteile weiterer, weniger dominanter Streuer enthalten. Diese verschiedenen Anteile wurden auf zwei Arten im Signal modelliert. Das Gesamtrauschen  $v_n$  setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$v_n = v_{d,n} + v_{s,n} \quad (6.1)$$

wobei die beiden Rauschanteile wie folgt definiert sind:

- $v_{d,n}$ : diskretes Rauschen von 5 Streuern (Störstreuer, Clutter) mit einer für alle Störstreuer gleichen relativen Amplitude zwischen 0,1 und 0,3. Dieser Anteil soll fünf weitere, schwächer reflektierende Streuer in der Auflösungszelle repräsentieren. Das komplexwertige Signal wird wie das Signal der  $k$  dominanten Streuer erzeugt. Die entsprechenden Elevationen der 5 Störstreuer werden zufällig im gesamten Elevationsbereich zwischen -100 m und +100 m gewählt. Dieser Rauschanteil ist somit nicht normalverteilt auf dem Gesamtsignal. Dies führt dazu, dass auch die NLSE-Lösung nicht immer die optimalen Elevationen der  $k$  Streuer finden wird.
- $v_{s,n}$ : Rauschen auf dem Gesamtsignal mit einer relativen Amplitude von 0,1 bis 0,9 (je nach Experiment). Dieser Anteil soll Resteinflüsse der Atmosphäre, die zeitliche Dekorrelation sowie Orbitfehler simulieren. Das komplexwertige Rauschen ist normalverteilt und wird auf das Gesamtsignal aufaddiert. Es wirkt wie ein „Verwischen“ der Daten und stellt hohe Anforderungen an die Robustheit der Rekonstruktionsalgorithmen.

Abbildung 6.1 zeigt schematisch den Aufbau des Rauschmodells. Die nun folgenden Vergleiche beruhen im Wesentlichen auf der Variation der Elevationen der  $K$  dominanten Streuer (in Abbildung 6.1 blau dargestellt).



**Abb. 6.2:** Beispielhaftes Ergebnis für das Auflösungsvermögen. Soll-Elevationen:  $s_1 = -30\text{ m}$ ,  $s_2 = +20\text{ m}$ . Amplituden:  $\gamma_1 = 1,0$ ,  $\gamma_2 = 0,8$ . Rauschamplituden:  $v_{s,n} = 0,2$ ,  $v_{d,n} = 0,1$ .

### 6.1.2 Vergleich von Beamforming, TSVD und WSVD mit Hilfe des Plausibilitätskriteriums

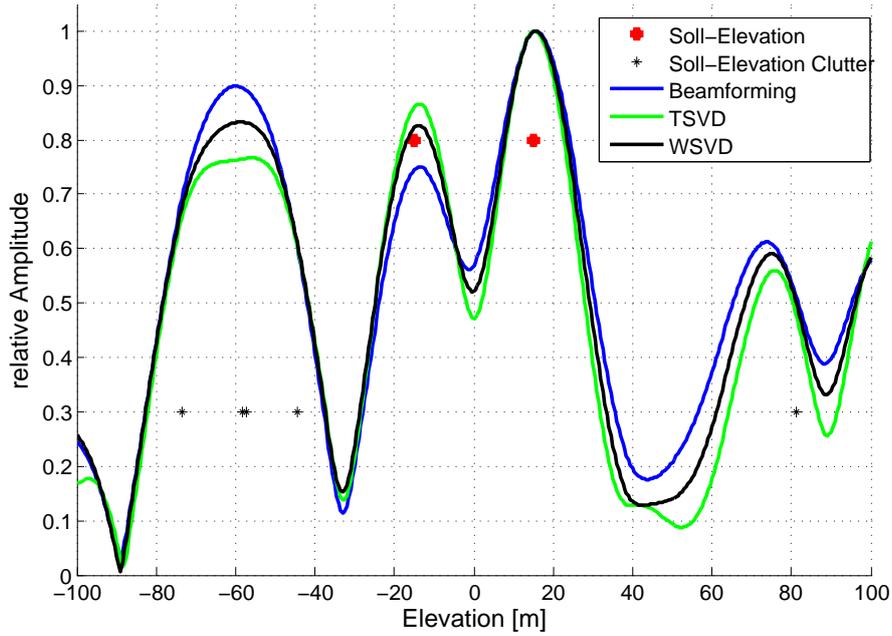
Das rekonstruierte Signal gilt dann als erfolgreich wiederhergestellt, wenn sich die  $K$  Maxima an den richtigen Elevationen finden lassen. Als Maß hierfür wird das Plausibilitätskriterium aus Kapitel 5.1 herangeführt.  $K$  Gauß-Kurven werden in das Gesamtsignal geschätzt, wobei die  $K$  Mittelwerte durch die Positionen der  $K$  größten lokalen Maxima gegeben sind. Auf die korrekte Rekonstruktion der Amplitude wird nicht weiter eingegangen, da die Anwendungen später hauptsächlich in der Ermittlung der korrekten Elevationen liegen.

Abbildung 6.2 zeigt ein Beispiel für das rekonstruierte Signal zweier Streuer. Die dazugehörigen Plausibilitätsmaße lauten:

$$P_{\text{BF}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4599 \\ 0,4599 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{TSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5824 \\ 0,5824 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{WSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4904 \\ 0,4904 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Größenordnungen der Plausibilitätsmaße sind gleich und auch der visuelle Vergleich zeigt, dass alle Elevationen der Maxima in der Nähe der Soll-Elevationen liegen. Das rekonstruierte Signal ist im Falle des Streuers bei  $s = -30\text{ m}$  leicht nach links verschoben, was auf die Überlagerung der zwei dominanten sowie der fünf Störstreuer zurückzuführen ist.

Abbildung 6.3 zeigt ein Beispiel für die Anfälligkeit der Algorithmen für eine Anhäufung von Streuern geringerer Amplitude in einem Gebiet. Die zufällige Verteilung der 5 Streuer mit einer Amplitude von je 0,3 führt zu einer Anhäufung um das Gebiet bei  $s = -60\text{ m}$ . Alle Rekonstruktionsalgorithmen reagieren auf diese Einflüsse. Es ist zu erkennen, dass die TSVD-Kurve empfindlicher auf die verschiedenen Maxima reagiert und somit etwas flacher ist. Infolgedessen hat das lokale Maximum bei der Elevation von etwa  $-52\text{ m}$  eine relative Amplitude von



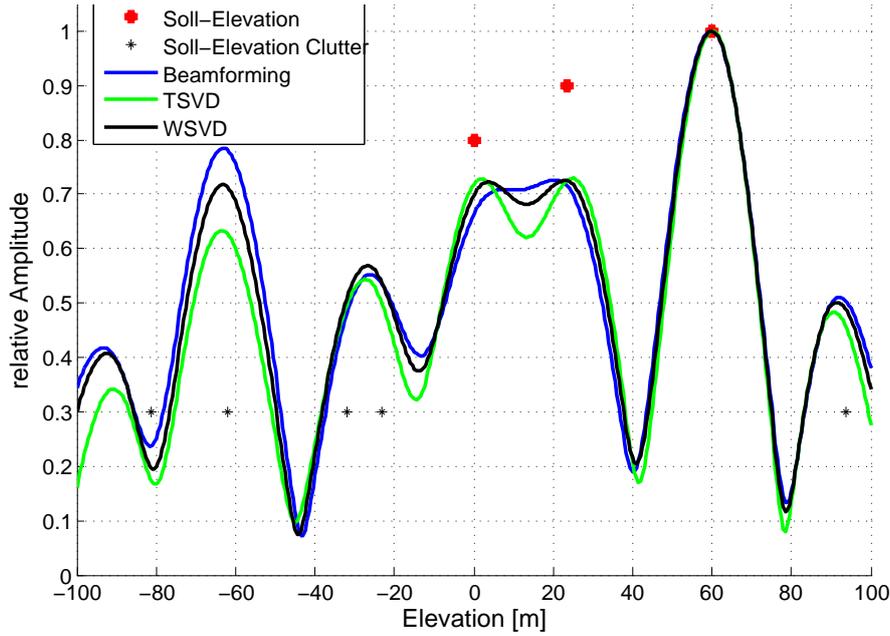
**Abb. 6.3:** Beispielhaftes Ergebnis für das Auflösungsvermögen. Soll-Elevationen:  $s_1 = -15 \text{ m}$ ,  $s_2 = +15 \text{ m}$ . Amplituden:  $\gamma_1 = 0,8$ ,  $\gamma_2 = 0,8$ . Rauschamplituden:  $v_{s,n} = 0,2$ ,  $v_{d,n} = 0,3$ .

etwa 0,76. Das gröber auflösende Beamforming hat eine größere relative Amplitude, die sogar größer als diejenige des dominanten Streuers bei  $s_1 = -15 \text{ m}$  ist. Es würde somit eine falsche Elevation zurückgegeben werden. Beamforming reagiert insgesamt „schwerfälliger“ als TSVD. WSVD bildet einen Kompromiss aus beidem. Die dazugehörigen Plausibilitätsmaße lauten:

$$P_{\text{BF}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,7472 \\ 0,7472 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{TSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,7288 \\ 0,7288 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{WSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,7301 \\ 0,7301 & 0 \end{bmatrix}$$

Alle Algorithmen liefern Trennbarkeiten in einer Größenordnung. Dennoch liefern Beamforming und WSVD die Elevation bei etwa -60 m als Ergebnis wieder. Dieses Maximum ist jedoch aus der Summe mehrerer kleiner, zufälliger Streuer entstanden.

Abbildung 6.4 zeigt nochmals das feinere Auflösungsvermögen des TSVD-Ansatzes. Das lokale Minimum zwischen den beiden Soll-Elevationen der ersten beiden Streuer ist bei TSVD und WSVD im Gegensatz zu Beamforming vorhanden. Bei TSVD ist es ausgeprägter. Dementsprechend besser ist das Approximationsergebnis der Gauß-Kurve und somit sind die Werte in  $P_{\text{TSVD}}$  kleiner. Die Reduzierung der Rekonstruktion auf die stärksten Singulärwerte und



**Abb. 6.4:** Beispielhaftes Ergebnis für das Auflösungsvermögen. Soll-Elevationen:  $s_1 = 0\text{ m}$ ,  $s_2 = +23,5\text{ m}$ ,  $s_3 = +60\text{ m}$ . Amplituden:  $\gamma_1 = 0,8$ ,  $\gamma_2 = 0,9$ ,  $\gamma_3 = 1,0$ . Rauschamplituden:  $v_{s,n} = 0,2$ ,  $v_{d,n} = 0,3$ .

-vektoren scheint somit robustere Ergebnisse als deren Regewichtung beim WSVD-Ansatz zu liefern. Die zu Abbildung 6.4 gehörigen Plausibilitätswerte lauten:

$$P_{\text{BF}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,2790 & 0,5902 \\ 1,2790 & 0 & 0,7236 \\ 0,5902 & 0,7236 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{\text{TSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,0153 & 0,4387 \\ 1,0153 & 0 & 0,6120 \\ 0,4387 & 0,6120 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{\text{WSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,1313 & 0,5308 \\ 1,1313 & 0 & 0,6355 \\ 0,5308 & 0,6355 & 0 \end{bmatrix}$$

Der nächstbessere Ansatz ist WSVD. Die Ergebnisse von WSVD und Beamforming ähneln sich sehr. Das Auflösungsvermögen von TSVD ist in allen Beispielen höher.

### 6.1.3 Einfluss des Rauschens

Ein grundlegender Einflussfaktor auf das Ergebnis der Inversionsalgorithmen ist das Rauschen in den Daten. In Kapitel 6.1.1 wird das verwendete Rauschmodell beschrieben, welches das Rauschen im Realdatenfall möglichst gut abbilden soll. Um den Einfluss und die Robustheit der verwendeten Algorithmen miteinander zu vergleichen, werden drei Streuer mit den Elevationen  $s_1 = -10\text{ m}$ ,  $s_2 = +20\text{ m}$ ,  $s_3 = +60\text{ m}$  simuliert. Eine gleichabständige Basislinienanordnung mit 21 Aufnahmen zwischen  $b_{\perp} = -225\text{ m}$  bis  $b_{\perp} = +225\text{ m}$  wird verwendet, um den Einfluss der Basislinienkonfiguration auszublenden. Zunächst wird nur normalverteiltes

Rauschen auf das Gesamtsignal mit verschiedenen Amplituden addiert und anschließend das Rauschen von 5 zufällig verteilten Streuern simuliert.

$$v_s = 0,0, v_d = 0,0 :$$

$$P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8744 & 0,7846 \\ 0,8744 & 0 & 0,9424 \\ 0,7846 & 0,9424 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8969 & 0,8046 \\ 0,8969 & 0 & 0,8202 \\ 0,8046 & 0,8202 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8877 & 0,8014 \\ 0,8877 & 0 & 0,9211 \\ 0,8014 & 0,9211 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_s = 0,2, v_d = 0,0 :$$

$$P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 1,0077 & 0,8758 \\ 1,0077 & 0 & 1,0269 \\ 0,8758 & 1,0269 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9735 & 0,8933 \\ 0,9735 & 0 & 0,8740 \\ 0,8933 & 0,8740 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,0267 & 0,8945 \\ 1,0267 & 0 & 0,9926 \\ 0,8945 & 0,9926 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_s = 0,2, v_d = 0,2 :$$

$$P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9576 & 1,6867 \\ 0,9576 & 0 & 2,0455 \\ 1,6867 & 2,0455 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8906 & 1,5539 \\ 0,8906 & 0 & 1,8552 \\ 1,5539 & 1,8552 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9399 & 1,689 \\ 0,9399 & 0 & 2,0349 \\ 1,689 & 2,0349 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_s = 0,6, v_d = 0,3 :$$

$$P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 1,7930 & 0,7370 \\ 1,7930 & 0 & 1,7709 \\ 0,7370 & 1,7709 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,2741 & 0,3355 \\ 1,2741 & 0 & 1,1255 \\ 0,3355 & 1,1255 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,6608 & 0,7315 \\ 1,6608 & 0 & 1,6929 \\ 0,7315 & 1,6929 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_s = 0,9, v_d = 0,3, \lambda_K = 0,1 :$$

$$P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 1,7170 & 0,7909 \\ 1,7170 & 0 & 1,0925 \\ 0,7909 & 1,0925 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,1878 & 0,7950 \\ 1,1878 & 0 & 0,5451 \\ 0,7950 & 0,5451 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,7243 & 0,8489 \\ 1,7243 & 0 & 1,0326 \\ 0,8489 & 1,0326 & 0 \end{bmatrix}$$

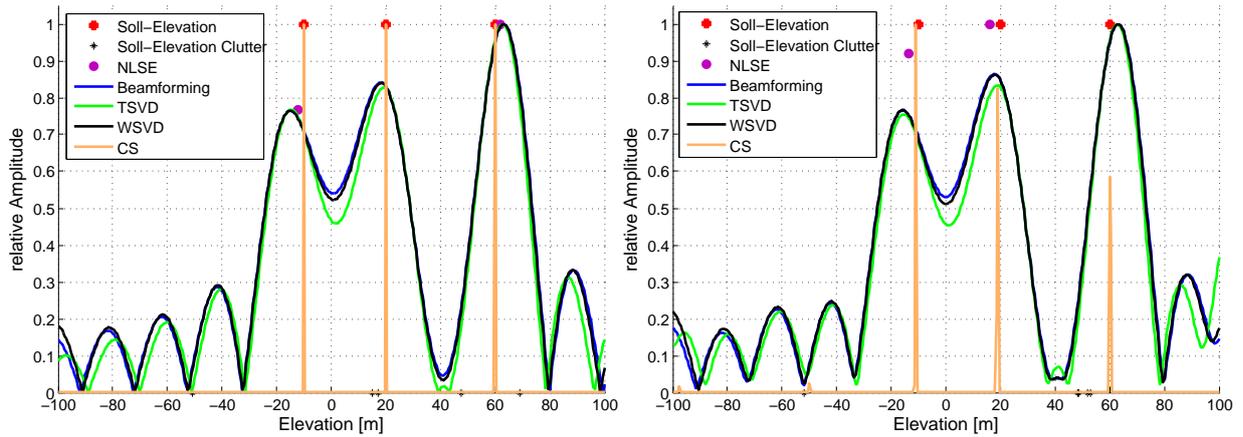
$$v_s = 0,9, v_d = 0,3, \lambda_K = 0,9 :$$

$$P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 1,5848 & 1,057 \\ 1,5848 & 0 & 0,6580 \\ 1,057 & 0,6580 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,1738 & 0,9934 \\ 1,1738 & 0 & 0,8880 \\ 0,9934 & 0,8880 & 0 \end{bmatrix}$$

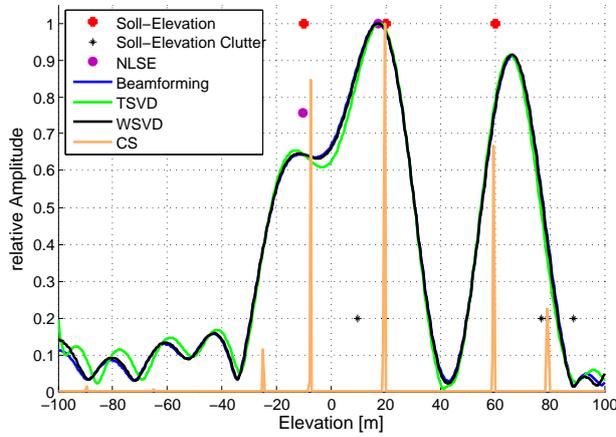
$$P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,6174 & 1,1105 \\ 1,6174 & 0 & 0,6340 \\ 1,1105 & 0,6340 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbildung 6.5(a) zeigt den rauschfreien Zustand. Die NLSE-Lösung ist apriori auf zwei Streuer festgelegt und liefert den ersten und dritten Streuer richtig zurück. Alle anderen Verfahren liefern alle drei Streuer richtig zurück. In Abbildung 6.5(b) wird das gesamte Rauschniveau auf 0,2 angehoben, was sich im NLSE-Ergebnis widerspiegelt. Je nach Schwellwert, der angibt, ab welcher Amplitude ein Maximum als Streuer erkannt wird, kann es auch bei CS zu ersten Fehlereinflüssen aufgrund des Gesamtrauschens kommen. Die auf der Spektralzerlegung basierenden Verfahren reagieren hier robuster. Anschließend werden zusätzlich 5 punktuelle Störstreuer mit einer Amplitude von 0,2 simuliert (Abbildung 6.5(c)). Es zeigt sich, dass die Streuer durch die Spektralkurven nun nicht mehr so leicht zu trennen sind. Dies spiegelt sich

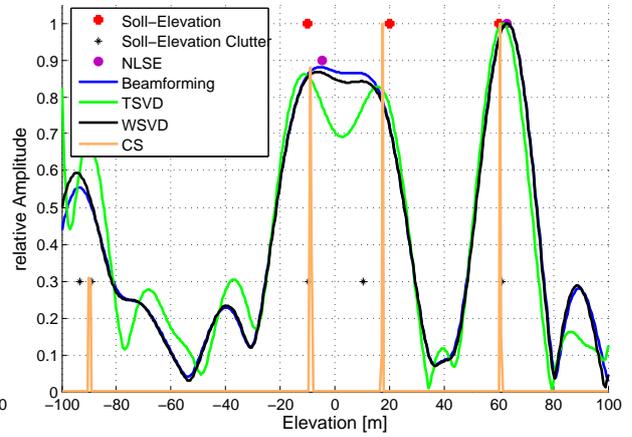


(a)  $v_s = 0,0, v_d = 0,0$

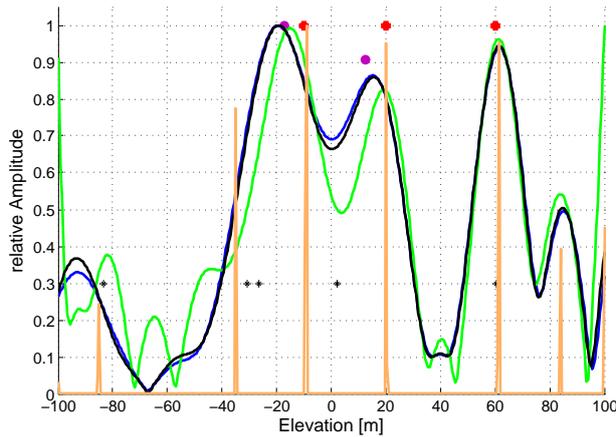
(b)  $v_s = 0,2, v_d = 0,0$



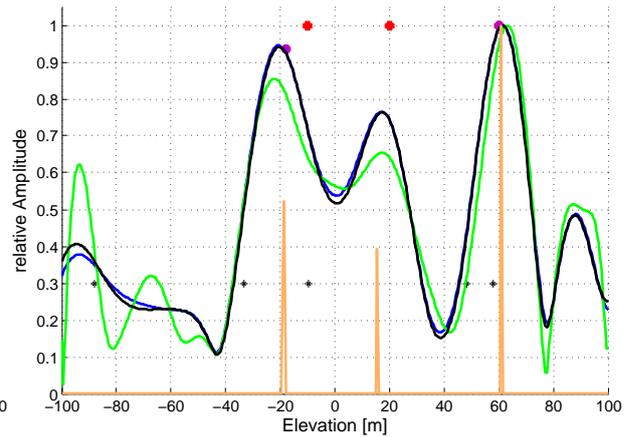
(c)  $v_s = 0,2, v_d = 0,2$



(d)  $v_s = 0,6, v_d = 0,3$

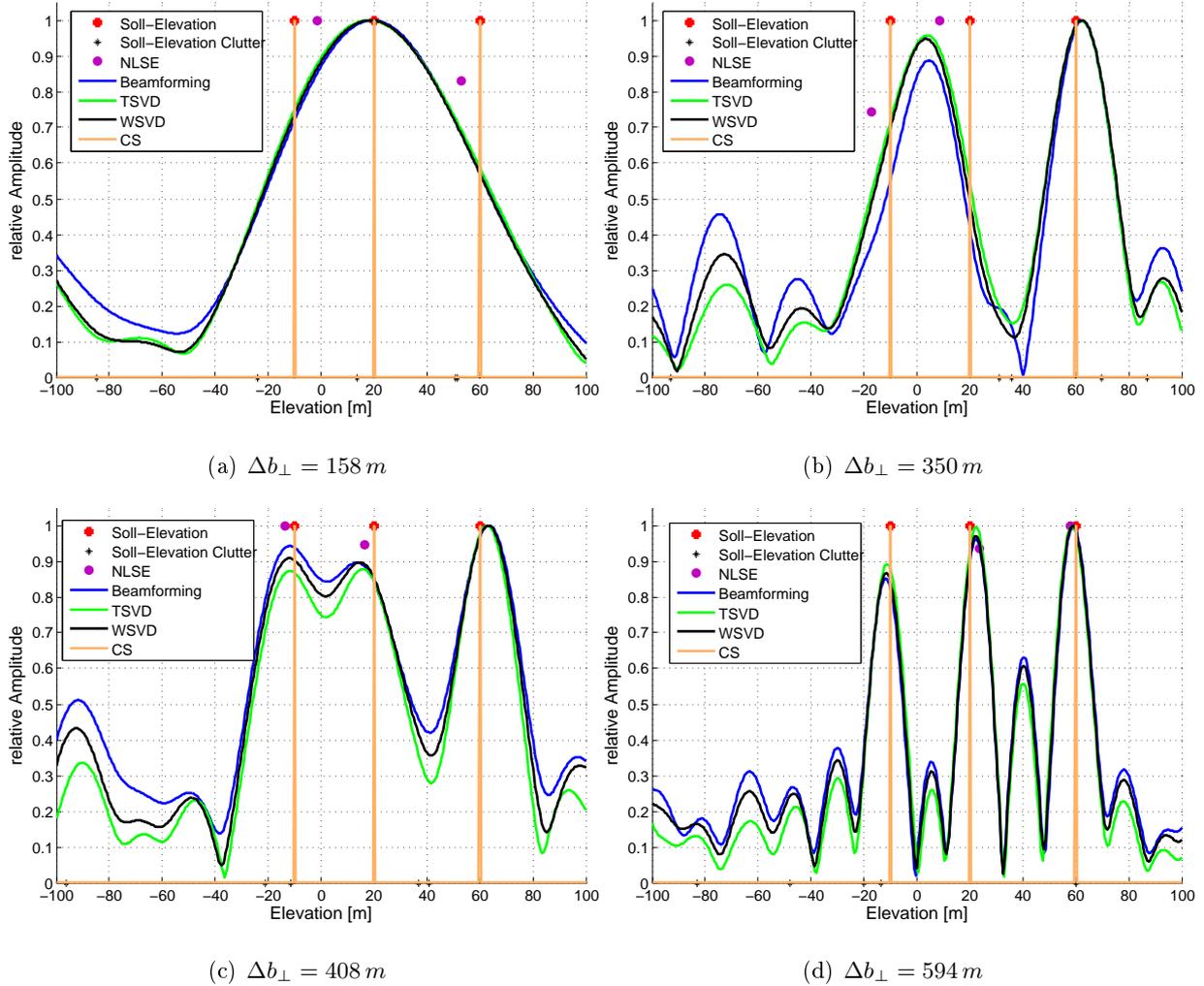


(e)  $v_s = 0,9, v_d = 0,3, \lambda_K = 0,1$



(f)  $v_s = 0,9, v_d = 0,3, \lambda_K = 0,9$

**Abb. 6.5:** Reflexionsprofile in Abhängigkeit des Rauschverhaltens.



**Abb. 6.6:** Reflexionsprofile in Abhängigkeit der Basislinienausdehnung.

auch in den entsprechenden Plausibilitätsmatrizen wieder. Anhand der Zahlen ist erkennbar, was der visuelle Eindruck bestätigt: TSVD löst unter Rauscheinfluss am besten auf, gefolgt von WSVD und Beamforming. Bei erneuter, erheblicher Erhöhung des Gesamt- sowie punktuellen Rauschniveaus (Abbildung 6.5(d)) zeigt sich diese Einordnung erneut. TSVD reagiert wesentlich empfindlicher auf die Streuer. CS ist sehr robust gegenüber beiden Rauschtypen. Dennoch erzeugen zwei punktuelle Störstreuer mit einer relativen Amplitude von je 0,3 im Bereich bei Elevation  $s = -90 \text{ m}$  ein Maximum der CS-Rekonstruktion. Eine weitere Erhöhung des Rauschens zeigt eine höhere Anfälligkeit von CS gegenüber dem Rauschen. Die Abbildungen 6.5(e) und 6.5(f) zeigen die Ergebnisse für CS mit verschiedenen Parametern für  $\lambda_K$ . Der Parameter  $\lambda_K$  sollte an das Rauschniveau angepasst werden. Ein kleiner Wert führt zu vielen Maxima, wodurch das Ergebnis dann nicht mehr dünnbesetzt ist. Ein größerer Wert führt zu weniger Maxima mit kleinen Amplituden. Der Einfluss dieses Parameters auf das Ergebnis im Realdatenfall wird näher in Kapitel 6.2.2 beschrieben.

### 6.1.4 Einfluss der Basislinienausdehnung

Durch Simulation verschiedener Basislinienkonfigurationen soll gezeigt werden, wie das Auflösungsverhalten der verschiedenen Rekonstruktionsalgorithmen von der Basislinienausdehnung  $\Delta b_{\perp}$  und somit der Rayleigh-Grenze  $\delta_s$  abhängig ist. Dafür wurden zufällig 20 Basislinien mit einem vorher definierten maximalen Abstand von [100 m, 200 m, 250 m, und 300 m] simuliert. Die daraus resultierenden Basislinienausdehnungen  $\Delta b_{\perp}$  betragen 158 m, 350 m, 408 m und 594 m. Es wurde kein Rauschen simuliert. Die Streuerelevationen und -amplituden entsprechen denen aus Kapitel 6.1.3. Abbildung 6.6 zeigt die entsprechenden rekonstruierten Reflexionsprofile. Die Trennbarkeit der Streuer wird mit dem in Kapitel 5.1 entwickelten Plausibilitätsmaß bewertet:

$$\begin{array}{l}
 \Delta b_{\perp} = 158 \text{ m} : \\
 P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 8,6244 & 14,1771 \\ 8,6244 & 0 & 8,093 \\ 14,1771 & 8,093 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 8,6305 & 14,2042 \\ 8,6305 & 0 & 8,1169 \\ 14,2042 & 8,1169 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 8,6955 & 14,5202 \\ 8,6955 & 0 & 8,3654 \\ 14,5202 & 8,3654 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \Delta b_{\perp} = 350 \text{ m} : \\
 P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 7,0838 & 2,7301 \\ 7,0838 & 0 & 4,8876 \\ 2,7301 & 4,8876 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 5,9609 & 2,1199 \\ 5,9609 & 0 & 4,1289 \\ 2,1199 & 4,1289 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 6,5481 & 2,2993 \\ 6,5481 & 0 & 4,5807 \\ 2,2993 & 4,5807 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \Delta b_{\perp} = 408 \text{ m} : \\
 P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 1,0594 & 0,5346 \\ 1,0594 & 0 & 1,0032 \\ 0,5346 & 1,0032 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9639 & 0,4825 \\ 0,9639 & 0 & 0,9072 \\ 0,4825 & 0,9072 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 1,0213 & 0,5401 \\ 1,0213 & 0 & 0,9887 \\ 0,5401 & 0,9887 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \Delta b_{\perp} = 594 \text{ m} : \\
 P_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9468 & 0,3355 \\ 0,9468 & 0 & 0,7063 \\ 0,3355 & 0,7063 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{TSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8398 & 0,2553 \\ 0,8398 & 0 & 0,7059 \\ 0,2553 & 0,7059 & 0 \end{bmatrix} \\
 P_{WSVD} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8980 & 0,2872 \\ 0,8980 & 0 & 0,7053 \\ 0,2872 & 0,7053 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Die auf der Spektralzerlegung basierenden Verfahren (BF, TSVD und WSVD) liefern in allen vier Basislinienkonfigurationen ähnliche Ergebnisse. In Abbildung 6.6(c) wird die etwas feinere Sensibilität der TSVD zwischen den Maxima der beiden näher beieinander liegenden Streuer deutlich. Das entsprechende Plausibilitätsmaß ist hier kleiner als die der anderen kontinuierlichen Methoden. Eine Basislinienausdehnung von 158m ist mit diesen Verfahren nicht ausreichend, um die drei Streuer zu trennen. CS zeigt hier seine Eigenschaften als Super-Resolution-Algorithmus und löst die drei Streuer auf. Hier muss jedoch auf die Abwesenheit jeglichen Rauschens hingewiesen werden. Ohne Rauschen ist der CS-Ansatz völlig unabhängig von der Basislinienausdehnung. Für den NLSE-Algorithmus wurde apriori eine Streueranzahl von  $K = 2$  festgesetzt. Hier zeigen sich in den Abbildungen 6.6(a) und 6.6(b) Ergebnisse, die falsche Elevationen der Streuer liefern würden. Erst mit den größeren Basislinienausdehnungen liefert der NLSE-Algorithmus die Elevationen von zwei der drei Streuer zurück. Für TerraSAR-X können Basislinienausdehnungen von bis zu 500 m erwartet werden, sodass das Ergebnis aus Abbildung 6.6(c) am ehesten den im Realdatenfall auftretenden Situationen ent-

spricht. Hinzu kommt das Rauschen, sodass auch der CS-Ansatz weniger stabile Ergebnisse liefern wird.

### 6.1.5 Einfluss der Gleichmäßigkeit der Basislinien

Um den Einfluss von unregelmäßigen Basislinien zu untersuchen, wird das synthetische Signal zweier Streuer mit 21 zufälligen Basislinien zwischen -225 m und +225 m synthetisiert. Dabei wird darauf geachtet, dass die Ausdehnung der Basislinien exakt 450 m beträgt. Somit ist das Ergebnis nicht auf eine unterschiedliche Auflösungsfähigkeit durch eine verschiedenen große Rayleigh-Grenze beeinflusst. Anschließend werden die Reflexionsprofile mit einer regelmäßigen Basislinienverteilung in der gleichen Ausdehnung mit einem Abstand von 22,5 m berechnet. Des Weiteren wird eine bewusst schiefe Basislinienverteilung gewählt.

Die Streuerelevationen werden so festgelegt, dass sie von den kontinuierlichen Verfahren bei gleichmäßigen Basislinien gerade aufgelöst werden können. Dies ist durch die Rayleigh-Grenze bei einem Streuerabstand von etwa 26 m der Fall. Die dazugehörigen Plausibilitätsmaße lauten (gleichabständige Basislinien, vgl. Abbildung 6.7(a)):

$$P_{\text{BF}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,3722 \\ 1,3722 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{TSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,1794 \\ 1,1794 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{WSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,3354 \\ 1,3354 & 0 \end{bmatrix}$$

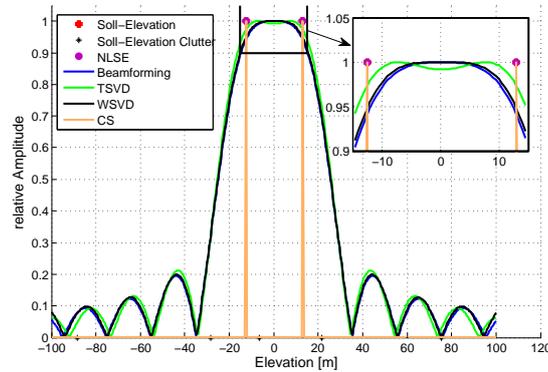
TSVD löst etwas besser auf, was sowohl in dem vergrößerten Ausschnitt der Abbildung 6.7(a) als auch an den Zahlenwerten des Plausibilitätsmaßes zu sehen ist. Die gleiche Konfiguration mit einer zufälligen Basislinienverteilung wie in Abbildung 6.7(b) ergibt ein anderes Ergebnis. Abbildung 6.7(c) zeigt, dass die Reflexionsprofile weiter zusammenlaufen. Dies macht sich auch in den Zahlen bemerkbar (ungleichmäßige Basislinien, vgl. Abbildung 6.7(c)):

$$P_{\text{BF}} = \begin{bmatrix} 0 & 2,7845 \\ 2,7845 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{TSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,4809 \\ 1,4809 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{WSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,9282 \\ 1,9282 & 0 \end{bmatrix}$$

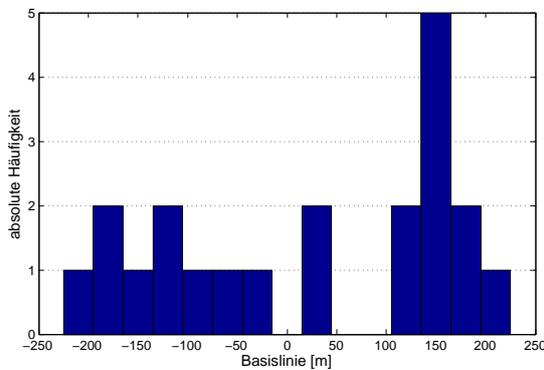
Hier zeigt sich deutlich, dass sich Beamforming relativ gesehen am stärksten verschlechtert, während TSVD am robustesten ist. Auch visuell zeigt sich, dass sich die drei Spektren voneinander lösen. Noch besser ist dieser Effekt bei einer bewusst schief gewählten Verteilung der Basislinien zu erkennen (Abbildung 6.7(d)). Die Nebenkeulen des mittels Beamforming invertierten Reflexionsprofils haben eine relative Amplitude von etwa 0,8. Die dazugehörigen Plausibilitätsmaße sind alle kleiner als bei den anderen Basislinienkonfigurationen (ungleichmäßige, einseitig schiefe verteilte Basislinien, vgl. Abbildung 6.7(e)):

$$P_{\text{BF}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,90343 \\ 0,90343 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{TSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1,0358 \\ 1,0358 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{\text{WSVD}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9657 \\ 0,9657 & 0 \end{bmatrix}$$

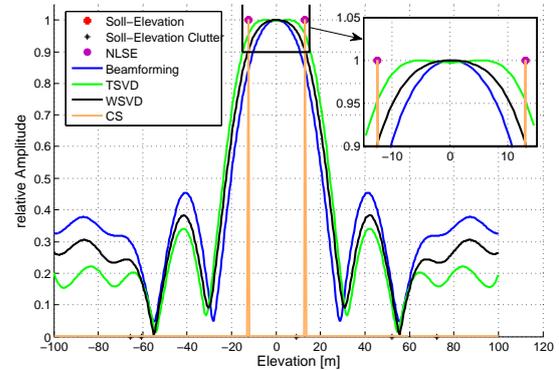
Die einseitig schiefe Basislinienkonfiguration führt zu einem sehr bewegtem Verlauf der Reflexionsprofile. Dies hat zur Folge, dass sich mehr lokale Maxima bilden und die Gauß-Kurven besser approximieren. Dies führt zu geringeren Werten in den Plausibilitätsmatrizen. Ein



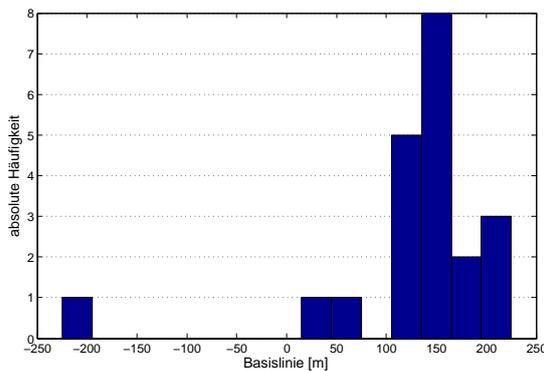
(a) Reflexionsprofile mit gleichabständigen Basislinien.



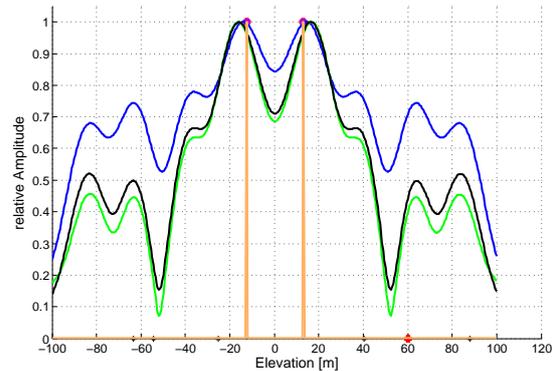
(b) Histogramm ungleichmäßige, zufällige Basislinien



(c) Reflexionsprofile mit zufälligen Basislinien.



(d) Histogramm bewusst einseitig gewählter Basislinien



(e) Reflexionsprofile mit bewusst einseitig gewählten Basislinien.

**Abb. 6.7:** Reflexionsprofile in Abhängigkeit der Gleichabständigkeit der Basislinien.

wichtiger Aspekt ist die in [26] beschriebene Rauschpropagation aufgrund der ungleichmäßigen Basislinienverteilung, die in diesem Beispiel gut sichtbar wird. Ein Messrauschen, was normalverteilt auf alle Messungen addiert wird, wird im Falle ungleichmäßiger Basislinien besonders durch Beamforming verstärkt, da es auch in den Bereichen sehr hohe relative Amplituden aufweist, wo sich kein dominanter Streuer befindet. TSVD und WSVD sind wesentlich robuster gegenüber diesen Effekten. Gänzlich unbeeinflusst von nichtgleichabständigen Basislinien sind CS und NLSE.

Eine wichtige Erkenntnis ist die Tatsache, dass die Reflexionsprofile der kontinuierlichen Verfahren falsche Elevationen anzeigen, wenn zwei Streuer nicht getrennt werden können. Dies hängt weniger mit der Gleichabständigkeit als mit der Gesamtausdehnung der Basislinien zusammen. Können zwei Streuer getrennt werden, so liegen deren rekonstruierte Elevationen unabhängig von der relativen Amplitude nah an den Soll-Elevationen. Dies ist Bedingung für die richtige Rekonstruktion der Elevationen dominanter Streuer. Jedoch werden auch auftretende Nebenkeulen verstärkt sodass es bei der Überlagerung von Rauschen zu falschen Elevationen kommen kann.

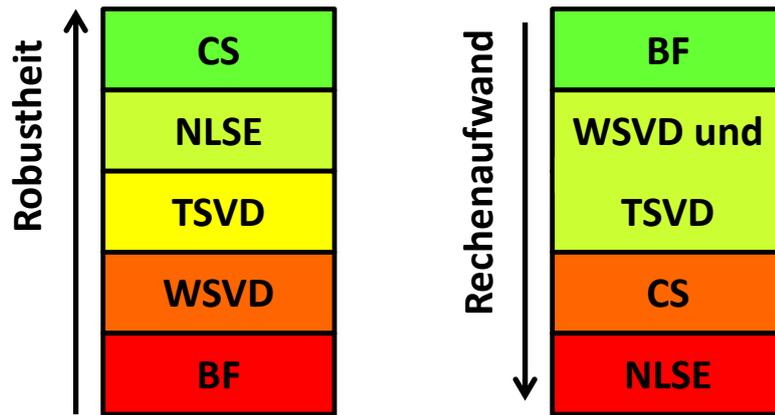
### 6.1.6 Übersicht der Einflüsse

Abschließend für die Untersuchung auf synthetischen Daten soll eine Übersicht gegeben werden, für welche Fehlereinflüsse die verschiedenen Verfahren sensibel sind.

Verfahren / Einfluss	Basislinien: Gleichabständigkeit	Basislinien: Ausdehnung	Rauschen
Beamforming	groß	groß	mittel
TSVD	gering	groß	gering
WSVD	mittel	groß	mittel
NLSE	nein	nein	gering
CS	nein	nein	gering, abhängig von $\lambda_K$

**Tabelle 6.1:** Übersicht der Sensibilität der vorgestellten Verfahren auf drei Einflüsse, die die Auflösung beeinflussen.

Die in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Einflüsse beeinträchtigen das Auflösungsvermögen der verschiedenen Rekonstruktionsalgorithmen. Eine Einordnung der Verfahren untereinander mit Hinblick auf die Robustheit gegenüber der genannten Einflüsse auf Grundlage der theoretischen und empirischen Untersuchungen im Rahmen dieser Masterarbeit ist in Abbildung 6.8 gezeigt.



**Abb. 6.8:** Einordnung der Verfahren nach Robustheit und Rechenaufwand.

Für die Anwendung auf reale Daten sollten somit CS, NLSE und TSVD die besten Ergebnisse liefern. Um ein vollständiges Ergebnis zu erhalten, werden dennoch WSVD und Beamforming mit in die Untersuchungen einbezogen.

## 6.2 Anwendung auf reale Daten

Die auf synthetischen Daten verglichenen Inversionsalgorithmen sollen nun auf reale Daten angewandt und die Ergebnisse verglichen werden. Hier gibt es den grundlegenden Unterschied, dass keine Informationen über die Anzahl der dominanten Streuer sowie deren Elevation zur Verfügung stehen. Zur Plausibilitätsentscheidung der jeweiligen Lösungen wird daher das in Kapitel 5.2 beschriebene Verfahren herangezogen. Zur Verfügung steht ein TerraSAR-X-Bilderstapel mit 20 Aufnahmen des Innenstadtbereiches von Berlin.

### 6.2.1 Einfluss der Modellselektion auf den Verlauf der Elevationsprofile

Das in Kapitel 4 vorgestellte Verfahren zur Auswahl des wahrscheinlichsten Modells wird genutzt, um die Anzahl der Streuer in einer Auflösungszelle zu schätzen. Als Informationskriterium wird der AICc genutzt. Abbildung 6.9 zeigt ein Elevationsprofil, welches mit TSVD erzeugt wurde. In schwarz sind die Maxima der einzelnen Reflexionsprofile ohne Modellselektion zu sehen, in rot diejenigen nach einer Modellselektion. Insgesamt ist eine Reduzierung der Punktzahl durch die Modellselektion zu erkennen. Von 207 Maxima bleiben nach der Modellselektion 99 erhalten. In vielen Fällen entsprechen die Maxima nach der Modellselektion den vorherigen Maxima. In einigen Fällen verändert die Modellselektion jedoch nicht nur die Anzahl der Streuer im Ergebnis sondern auch deren Elevation. Außerdem ist erkennbar, dass viele Punkte am Rand des Elevationsbereiches aussortiert werden. Somit trägt die Modellselektion auch zur Bereinigung der Daten von Ausreißern bei.

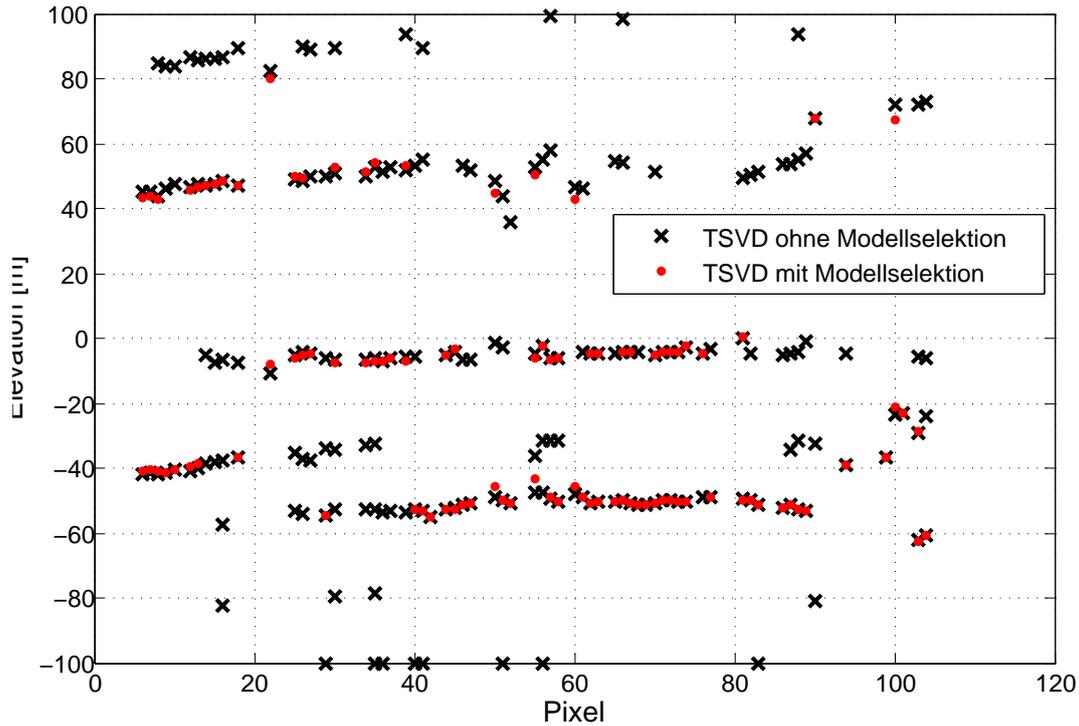


Abb. 6.9: Einfluss der Modellsektion auf Elevationsprofil.

### 6.2.2 Einfluss von $\lambda_K$ bei Compressive Sensing

Ein Vergleich an Realdaten für verschiedene Parameter  $\lambda_K$  soll zeigen, wie wichtig die optimale Gewichtung zwischen den Termen der  $L_2$ - und  $L_1$ -Normierung beim Compressive Sensing ist. Dieser Teil schließt sich eng an Kapitel 3.4 an. Es wird ein Profil über das in Abbildung 6.10(a) gezeigte Gebiet gelegt. Zur Visualisierung wird auf ein Aussortieren von Auflösungszellen mit hoher Amplitudendispersion verzichtet. In Abbildung 6.10(b) ist zunächst das Ergebnis mit dem in [4] vorgestellten Gewichtungsfaktor dargestellt. Der Wert ändert sich für jedes Pixel in Abhängigkeit von der Amplitudendispersion. Die roten Punkte entsprechen klaren Maxima. Besonders im hinteren Bereich des Profils treten jedoch auch weniger spitze Maxima auf. Die Lösung ist an diesen Stellen nicht mehr dünnbesetzt. Ein linearer Trend über das Elevationsprofil ist zu erkennen, jedoch scheint die Streuung um eine gedachte, nicht eingezeichnete ausgleichende Gerade sehr hoch.

In einem weiteren Schritt werden feste Werte für  $\lambda_K$  gesetzt. Abbildungen 6.10(c)-6.10(f) zeigen deutlich, dass ein zu hoher Wert keine dünnbesetzte Lösung liefert. Zwar ist in dem Ergebnis für  $\lambda_K = 2,0$  der lineare Trend noch zu erkennen, allerdings scheint der Wert zu hoch für das tatsächliche Rauschniveau zu sein. Die Lösung ist hier nicht dünnbesetzt, die Maxima sind ähnlich wie die Lösungen der kontinuierlichen Ansätze in Elevationsrichtung ausgedehnt. Ein wesentlich besseres Ergebnis liefert  $\lambda_K = 0,9$ . Fast alle Reflexionsprofile sind dünnbesetzt, jedoch treten auch Pixel ohne jegliches Maxima auf. Es ist auffällig, dass kein Signal vom Boden in den Reflexionsprofilen zu erkennen ist. Dies könnte an der Beschaffenheit des Bodens liegen. Ein 3D-Modell des entsprechenden Gebäudes sowie die Beschaffenheit des Bodens davor ist in Abbildung 6.11 zu sehen. Der Straßenstreifen ist mit Vegetation bepflanzt, die aufgrund ihrer voluminösen Rückstreueigenschaften im SAR-Bild nicht als dominante

Streuer auftritt. Das dies der tatsächliche Grund für das fehlende Signal des Bodens in den Reflexionsprofilen ist, ist jedoch nur eine Vermutung.

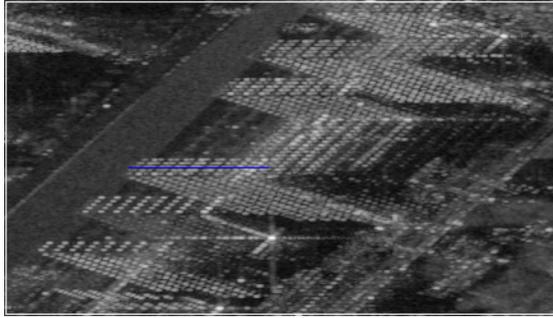
Abbildung 6.10(e) zeigt die Lösung für  $\lambda_K = 0,2$ . Neun Reflexionsprofile sind nicht dünnbesetzt. Die Verteilung der rekonstruierten Streuer entspricht bis auf wenige Ausnahmen denen der anderen Ergebnisse. In Abbildung 6.10(f) ist das Ergebnis zu sehen, das am ehesten vom CS-Ansatz zu erwarten ist. Die Lösungen aller Pixel sind dünnbesetzt, das aufsteigende Mauerwerk als linearer Trend ist erkennbar. Dies spricht dafür, dass  $\lambda_K = 0,1$  im Vergleich zu den anderen vorgestellten Werten am ehesten das Rauschniveau beschreibt. Jedoch zeigt sich auch, dass die Streuer relativ weit um die erwartete Gerade verteilt sind. Einzelne Streuer liegen bis zu 10 m unter oder über der gedachten Geraden. Hier liefern alle anderen Rekonstruktionsalgorithmen bessere Ergebnisse. Dieses und ein weiteres Profil werden im Folgenden untersucht.

### 6.2.3 Untersuchung einzelner Elevationsprofile

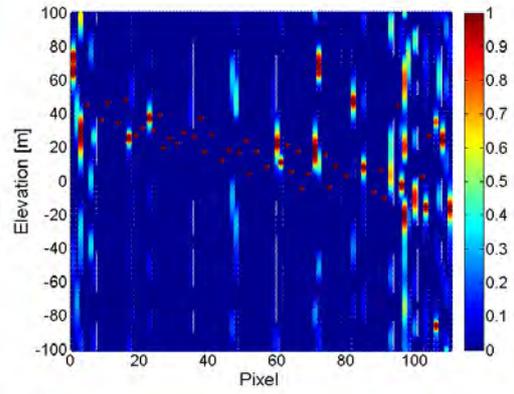
Abbildung 6.12 zeigt alle Elevationsprofile überlagert. Als Maximum wurde ein Streuer angenommen, der eine relative Amplitude  $> 0,8$  besitzt. Der lineare Trend der Fassade ist in allen Algorithmen erkennbar. Für NLSE wurden zwei Streuer pro Auflösungszelle angenommen, sodass der Algorithmus entsprechend die beiden wahrscheinlichsten Streuerelevationen liefert. Das Ergebnis von CS gibt Streuerelevationen zurück, die recht weit um die gemeinsame Gerade variieren. Beamforming und WSVD liefern exakt die selben Elevationen, sodass das Ergebnis hier zusammengefasst dargestellt ist. Um die Unterschiede im Bereich der Gerade besser analysieren zu können, wird ein Teilausschnitt vergrößert dargestellt. Es zeigt sich, dass sich die auf der Spektralzerlegung basierenden Verfahren bis auf einige Ausreißer im visuellen Vergleich gegenseitig sehr gut bestätigen. Auch die NLSE-Lösung deckt sich gut damit. Im vergrößerten Bereich variieren diese Lösungen um maximal 5 m. CS hingegen weicht um etwa 10 m ab. Dies entspricht einem Höhenunterschied von rund 2,5 m bzw. 5 m. Die im Elevationsprofil erkennbare Häuserfassade umfasst einen Elevationsbereich von etwa +40 m bis -15 m. Das entspricht einer Fassadenhöhe von etwa  $(+40 - (-15)) \cdot \sin(\Theta) = 27,5 \text{ m}$ . Das Gebäude ist achtstöckig, sodass sich eine Geschosshöhe von rund 3,40 m ergibt. Dieses Ergebnis scheint plausibel. Eine weitere Validierung könnte durch den Vergleich mit Ground-Truth-Daten durchgeführt werden.

Die Vorteile der Modellselektion sowie dem auf Nachbarschaft beruhenden Plausibilitätskriteriums werden an einem weiteren Profil gezeigt. Abbildung 6.13 zeigt das Profil im SAR-Amplitudenbild. Das Profil liegt über dem gesamten Bebauungsblock der Berliner Park Kolonnaden. Eine regelmäßige Struktur des aufsteigenden Mauerwerks müsste in den Daten zu erkennen sein. Das Elevationsprofil wird mittels TSVD gewonnen, wobei alle Auflösungszellen bis zu einer Amplitudendispersion von 0,4 genutzt werden.

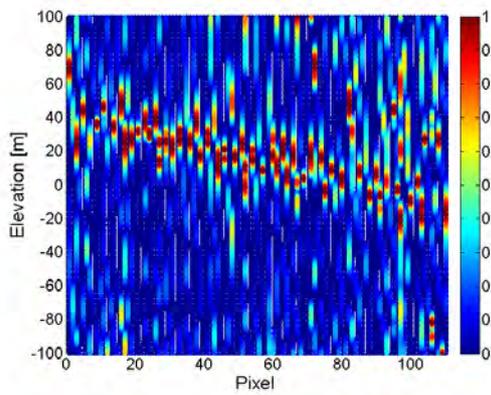
Schon in den Rohdaten (Abbildung 6.14(a)) sind die erwarteten Strukturen zu erkennen. Ein Vergleich mit dem Profil im SAR-Amplitudenbild zeigt eine Übereinstimmung im Elevationsprofil. Die Häuserecken sind auch im Elevationsprofil erkennbar. Um diese relevanten Strukturen zu extrahieren und von den vereinzelt Streuern zu trennen, wird neben der Modellselektion auch das auf Nachbarschaftsbeziehungen basierende Plausibilitätsmaß angewandt. Vereinzelt Streuer, die keiner Geraden zugeordnet werden können, werden verworfen. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.14(b) zu sehen.



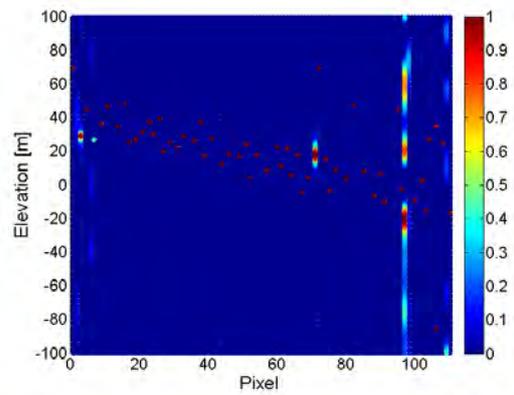
(a) Profil über Fassade eines Gebäudes der Park Kolonnaden in Berlin.



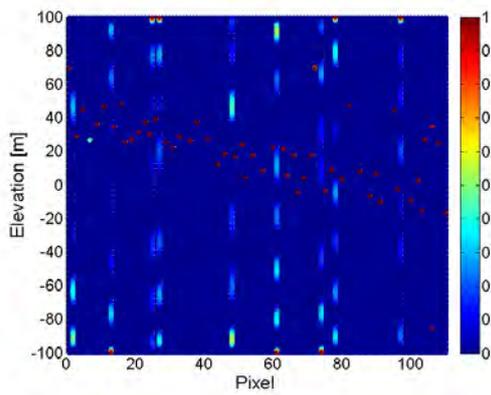
(b) Elevationsprofil nach Compressive Sensing mit  $\lambda_K = \sigma\sqrt{2\log N_L}$ .



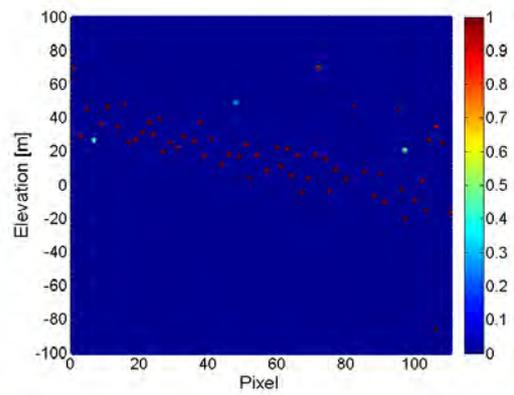
(c) Elevationsprofil nach Compressive Sensing mit  $\lambda_K = 2,0$ .



(d) Elevationsprofil nach Compressive Sensing mit  $\lambda_K = 0,9$ .



(e) Elevationsprofil nach Compressive Sensing mit  $\lambda_K = 0,2$ .



(f) Elevationsprofil nach Compressive Sensing mit  $\lambda_K = 0,1$ .

**Abb. 6.10:** Elevationsprofile in Abhängigkeit von  $\lambda_K$ .



Abb. 6.11: 3D-Modell und Luftbild eines Teils der Park Kolonnaden. Blau: Entsprechung des Profils in 6.10(a). Quelle: google earth

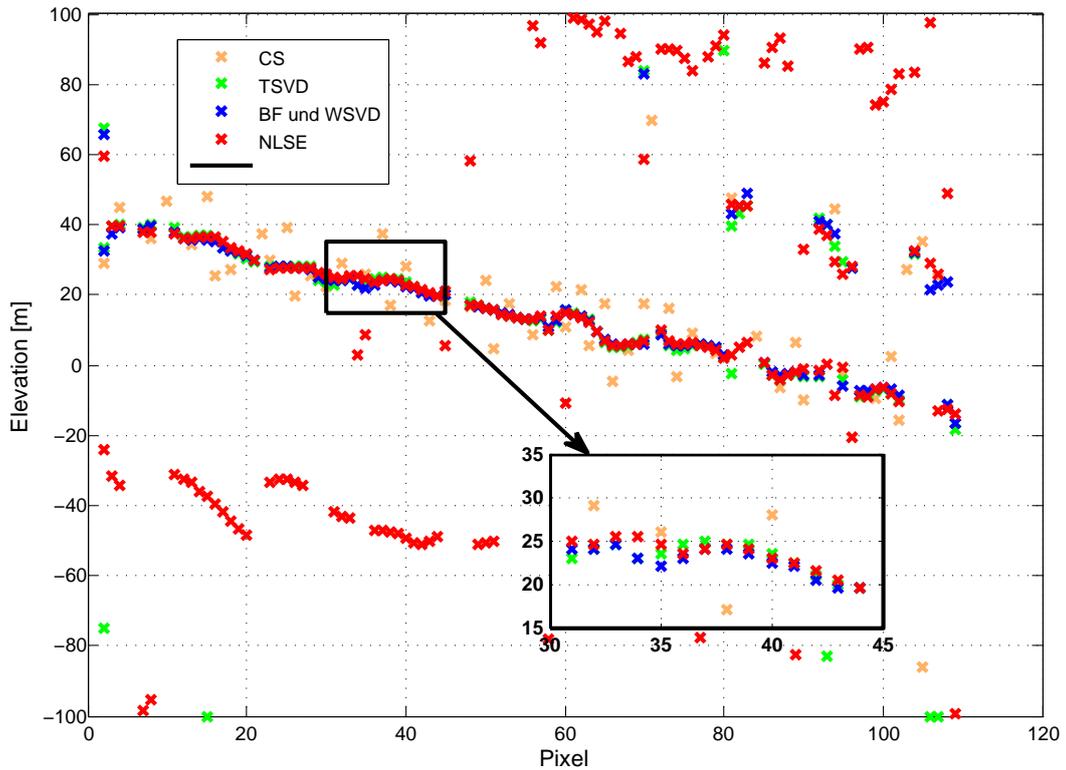
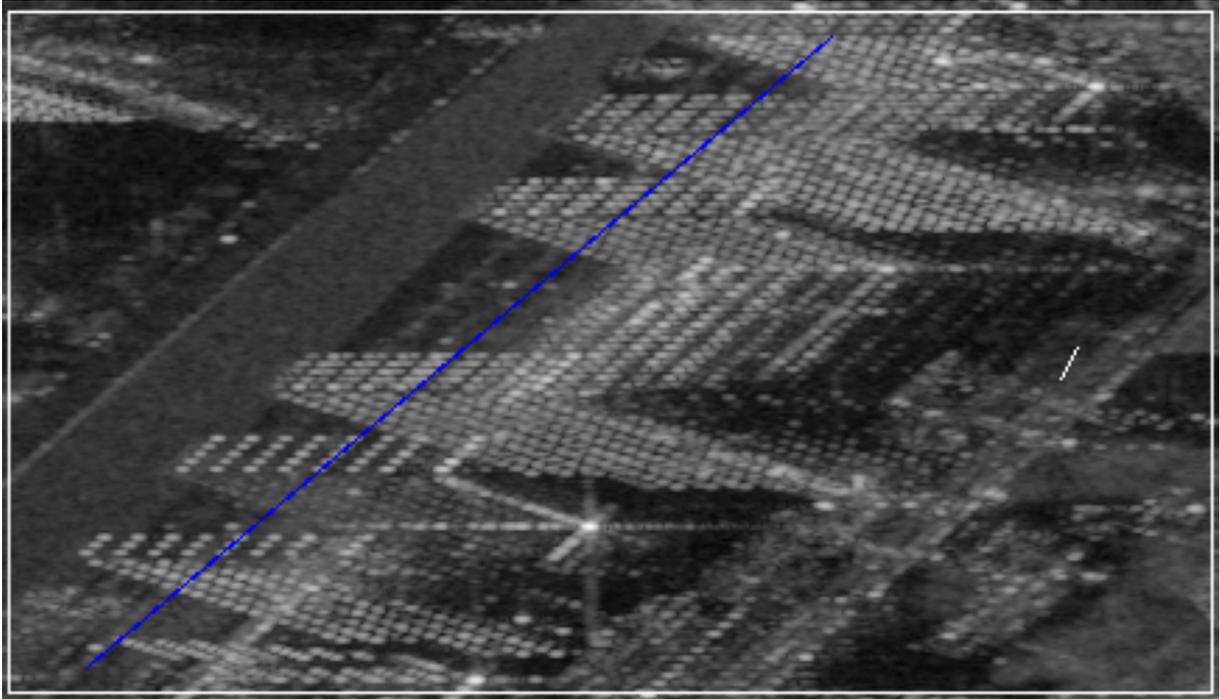
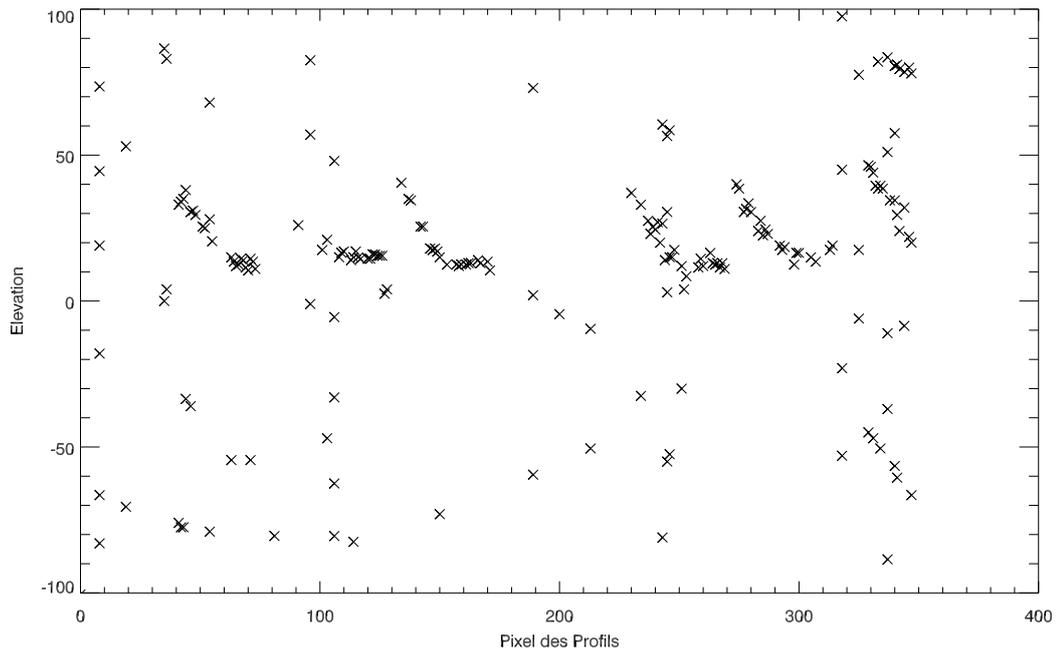


Abb. 6.12: Vergleich der Elevationsprofile aller Rekonstruktionsalgorithmen.

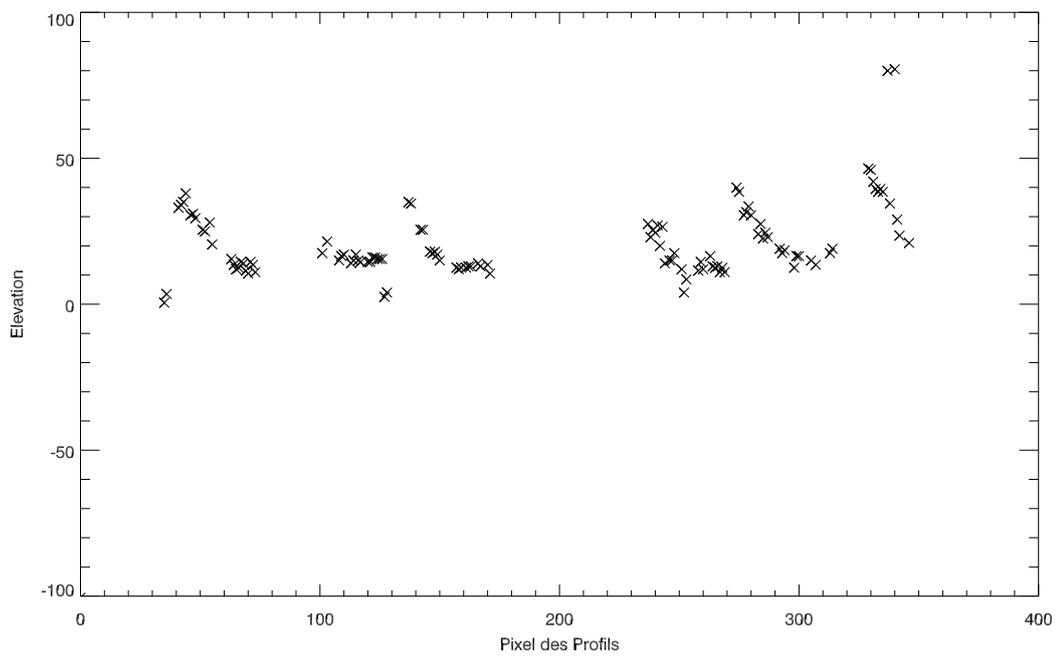


**Abb. 6.13:** Profil über Berliner Park Kolonnaden im SAR-Amplitudenbild.

Ein weiteres interessantes Profil zeigt Abbildung 6.15. Das dazugehörige Amplitudenbild sowie das entsprechende Gebiet als 3D-Stadtmodell sind in Abbildung 6.16 zu sehen. Im Elevationsprofil sind drei Punktgruppen zu erkennen, die in erster Näherung durch eine Gerade angenähert werden können. Die unterschiedlichen Verfahren liefern teilweise sehr verschiedene Ergebnisse, teilweise sind sie kongruent. Hier sind auch systematische Unterschiede feststellbar. So liefert NLSE im Pixelbereich zwischen 40 und 90 für die oberste Gerade systematisch höhere Elevationen als die anderen Verfahren. TSVD liefert hier teilweise gar keine Maxima. CS ist das Verfahren, welches entlang der Geraden am meisten streut. Alle anderen Verfahren liegen meist näher beieinander. Ein Vergleich mit dem 3D-Stadtmodell lässt einen Erklärungsversuch für die drei detektierten Geraden zu. Das weiße Gebäude in Abbildung 6.16(b) steht in der Blickrichtung des Satelliten auf das Gebäude, über dessen Fassade das Profil gelegt wurde. Das rekonstruierte Elevationsprofil könnte Elemente der Gebäudefassade, dem Boden sowie dem weißen Gebäude enthalten.



(a) Rohdaten des Profils.



(b) Daten nach TomoSAR-Prozessierung.

**Abb. 6.14:** Elevationsprofil über Berliner Park Kolonnaden. Rohdaten und Daten nach TomoSAR-Prozessierung.

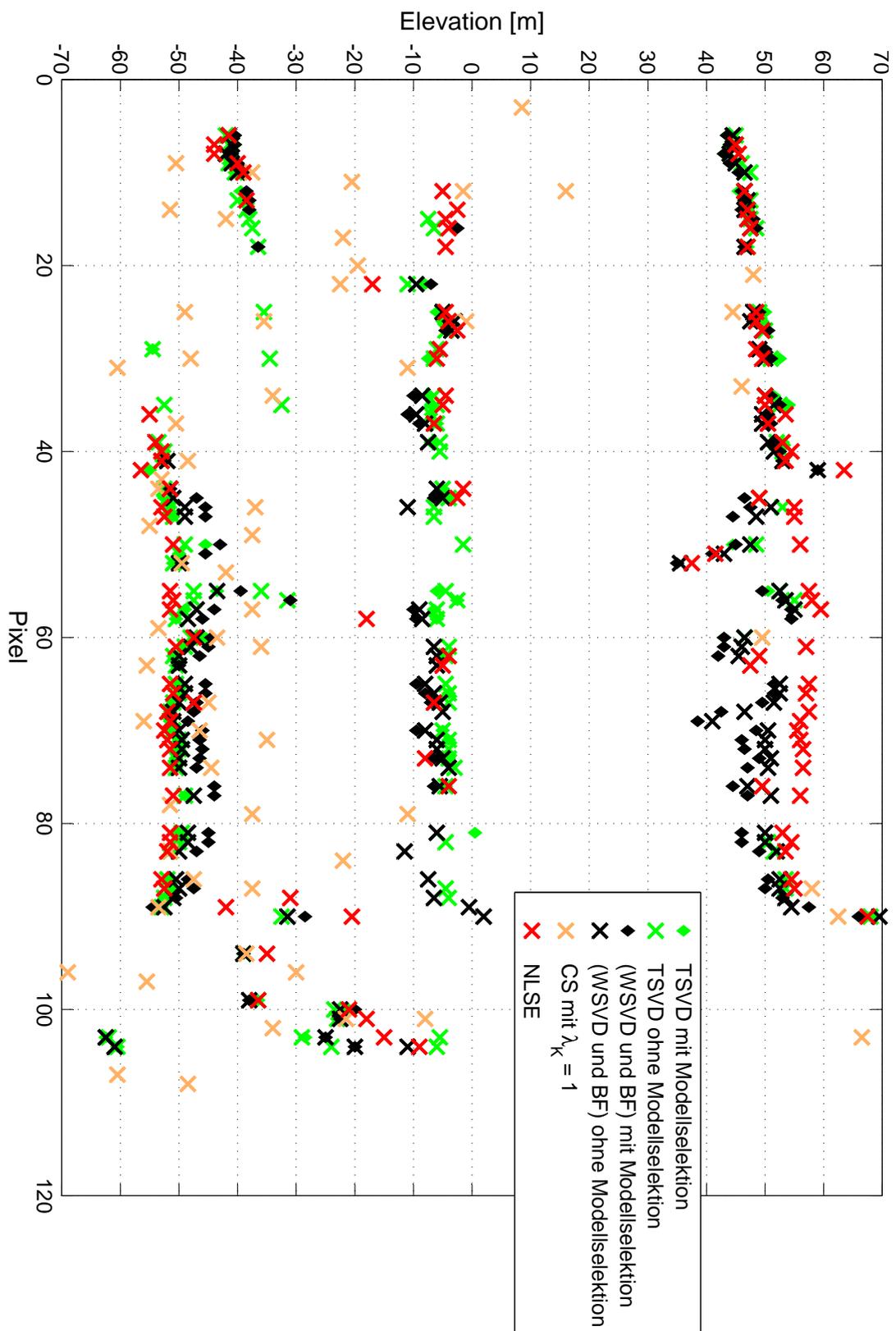
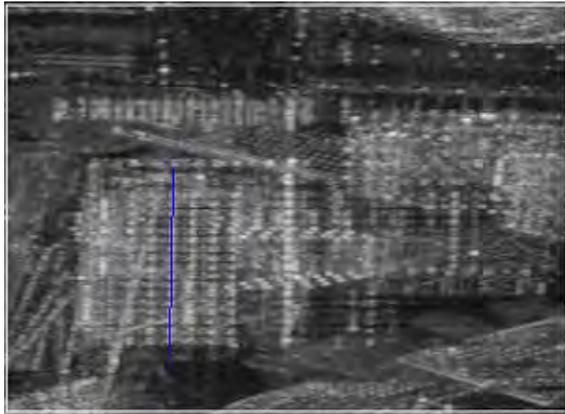


Abb. 6.15: Vergleich der Elevationsprofile aller Rekonstruktionsalgorithmen.



(a) Profil im SAR-Amplitudenbild



(b) Gebiet des Profils als 3D-Stadtmodell. Quelle: Google Earth

**Abb. 6.16:** Profil im Amplitudenbild sowie Gebiet als 3D-Stadtmodell.

## Kapitel 7

# Nachbearbeitung

TomoSAR stellt für sich genommen ein mächtiges Tool im Gesamtkontext der SAR-Techniken dar. Durch die Erweiterung der 2D-SAR-Welt um die Elevationsdimension eröffnen sich neue Anwendungsmöglichkeiten für SAR-Daten wie beispielsweise die automatische 3D-Stadtmodellgenerierung. Neben der optimalen Bestimmung der Elevationskoordinaten werden hierfür ebenso Methoden der automatischen Merkmalsextraktion benötigt. Die fertigen TomoSAR-Profile können als Punktwolken angesehen werden, auf die dann bereits bestehende Methoden der Merkmalsextraktion angewandt werden. So können aus Profilen Geraden und Kanten sowie aus mehreren Profilen Ebenen und andere flächenhafte Primitive extrahiert werden. Trotz der sehr hohen PS-Punktdichte lassen sich selbst in hochauflösenden Spotlight TerraSAR-X-Daten keine durchgängigen TomoSAR-Profile erzeugen. Es kommen immer wieder Auflösungszellen mit einer geringen Amplitudendispersion vor, was im Profil betrachtet Datenlücken darstellt. Um diese Datenlücken zu füllen, werden in einem Nachbearbeitungsschritt Geraden in die Punktwolken geschätzt. Dieser Schritt gehört nicht mehr zu der eigentlichen TomoSAR-Prozessierung und soll ansatzweise zeigen, wie die TomoSAR-Ergebnisse weiterverwendet werden könnten.

### 7.1 Regression nach kleinsten Quadraten

Ziel ist es, in eine gegebene Punktmenge eine bestanpassende Gerade zu schätzen. Als „bestanpassend“ ist ähnlich wie in Kapitel 4.2 die Maximierung des Likelihoods gemeint. Konkret bedeutet dies, die Minimierung der Residuenquadratsumme der geschätzten Gerade und der gegebenen Stützpunkte [21]. Der funktionale Zusammenhang zwischen den gegebenen Punkten  $y_i$  und der gesuchten Geradenparameter ist gegeben durch:

$$y_i = mx_i + b \tag{7.1}$$

Die Parameter  $m$  und  $b$  beschreiben die Gerade durch die gegebenen Punkte  $l$  an den Koordinaten  $(x_i, y_i)$ . Für das stochastische Modell können zwei Ansätze gewählt werden: Entweder werden alle TomoSAR-Punkte als gleichgenau angenommen, oder aus der Amplitudendispersion und den Plausibilitätsmaßen eine relative Gewichtung abgeleitet. Besonders sichere Punkte würden dann ein größeres Gewicht für die Bestimmung der Geradenparameter bekommen als

ungenauer bestimmte. Somit lassen sich die Gewichtsmatrix  $\bar{P}$  und Designmatrix  $A$  aufstellen zu:

$$\bar{P} = I \text{ oder } \hat{P} = \begin{bmatrix} f(DA_1, \sigma_{m,1}, V_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(DA_i, \sigma_{m,i}, V_i) & 0 \\ 0 & 0 & f(DA_n, \sigma_{m,n}, V_n) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial b} \\ \frac{\partial f_i}{\partial m} & \frac{\partial f_i}{\partial b} \\ \frac{\partial f_n}{\partial m} & \frac{\partial f_n}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_i & 1 \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Das lineare Ausgleichsproblem lässt sich dann lösen nach [21]:

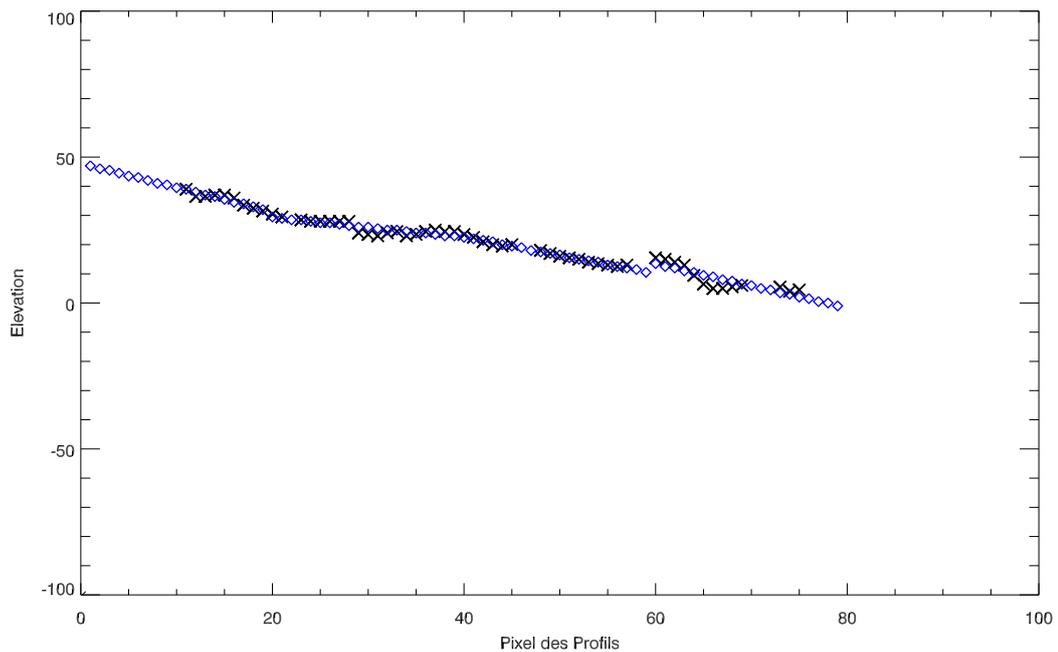
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (7.4)$$

Der einfache Ansatz mit  $\bar{P} = I$  wird im Rahmen dieser Masterarbeit implementiert und bringt bereits gute Ergebnisse. Der ungleichmäßig gewichtete Ansatz könnte Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

## 7.2 Clustering

Je nach Auflösungsvermögen der SAR-Eingangsdaten und der verwendeten Rekonstruktionsalgorithmen sind verschieden viele Punkte und mögliche Geraden in den Profilen zu finden. Meist kann von zwei Geraden (Boden und Gebäude) in urbanen Gebieten ausgegangen werden. Manchmal kann aber auch das Signal von drei oder sogar mehr Objekten in einem Profil erkennbar sein. Daher muss für jeden einzelnen Streuer die Zugehörigkeit zur „richtigen“ Gerade gefunden werden. Dies wird mittels einer Clustering über die Elevation erreicht. Die Anwendung des Plausibilitätskriteriums in Kapitel 5.2 bringt gute Ergebnisse, sodass angenommen werden kann, dass Streuer, die zu keiner Geraden gehören, verworfen werden. Somit genügt die Annahme dass Streuer, die zu einer Geraden gehören, gerade die Streuer in der jeweils nächsten Auflösungszelle sind, die den kleinsten Elevationsunterschied aufweisen. Für beispielsweise  $N = 20$  Pixel in einem Profilschnitt wird nun ein Histogramm über die Elevationen berechnet. Liegen zwei Geraden vor, so finden sich im Histogramm zwei Maxima. Die Wahl der Klassengröße basiert erneut auf der Annahme, dass maximal 5 Geraden (vgl. höchstens 5 Maxima im Reflexionsprofil einer Auflösungszelle) in den Daten aufgedeckt werden können. Der Mittelwert zwischen zwei Mittelwerten stellt die Trennlinie dar, die die einzelnen Streuer den jeweiligen Geraden zuordnet.

Dieser Ansatz funktioniert sehr zuverlässig bei Profilen, die horizontal verlaufende Elevationen aufweisen. Bei Geraden, die sich schneiden, wie beispielsweise bei einem Profil über aufsteigendes Mauerwerk und dem Boden, kann es mit diesem Ansatz zu falschen Zuordnungen kommen. Eine erste Verbesserung würde die Clustering nicht allein über die Elevation sondern über die Elevation und die Steigung bringen. Dieser zweidimensionale Clustering-Ansatz könnte beispielsweise mit einer k-means-Clustering realisiert werden, wobei die beiden Koordinatenachsen die Steigung sowie die Elevation wären.



**Abb. 7.1:** Beispiel für Nachbearbeitung. Schwarz: Streuer nach TomoSAR-Prozessierung. Blau: Ergebnis der Nachbearbeitung.

### 7.3 Anwendungsbeispiel

Ist durch die Clusterung festgelegt, für welche Punkte eine Gerade gefittet werden soll, wird Gleichung (7.4) angewendet. Für jeden Profilmittelwert kann mit den so gewonnenen Parametern ein ausgeglichener Elevationswert berechnet werden. Das Beispiel schließt an das Profil in Abbildung 6.12 an. Abbildung 7.1 zeigt in blau das Ergebnis der Nachbearbeitung. Vier ausgleichende Geraden werden durch die Punkte gelegt. Datenlücken werden somit ausgefüllt. Es ist jedoch auch auf die Extrapolation zu Beginn des Profils zu achten. Da keine Stützpunkte aus der TomoSAR-Prozessierung für die ersten Pixel des Profils geliefert werden, führt die Extrapolation hier zu einem Ergebnis, das nicht den Gegebenheiten in der Realität entspricht.

## Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Diese Masterarbeit zeigt, dass TomoSAR bereits mit wenigen Aufnahmen der gleichen Szene in der Lage ist, die dritte Raumdimension in die SAR-Prozessierung einzuführen. Die Trennung von mehreren Streuern in einer Auflösungszelle ist möglich. Dabei stellt die Invertierung der an wenigen, ungleichmäßig verteilten Stellen gemessenen Signale in die Reflexionsprofile der einzelnen Auflösungszellen die größte Herausforderung dar. Verschiedene Ansätze hierfür wurden vorgestellt und verglichen. Um die Trennbarkeit zweier und mehr Streuer im Reflexionsprofil bewerten zu können, wurde ein Plausibilitätsmaß entwickelt, welches auf der Anpassungsgüte von Gauß-Kurven durch die Reflexionskurven sowie das Verhältnis zwischen Rayleigh-Grenze der Auflösung und den Streuerabständen beruht. Das Plausibilitätsmaß ist für den Vergleich verschiedener Inversionsansätze unter ansonsten gleichen Bedingungen geeignet und liefert einen Anhaltspunkt für die Einordnung der Verfahren untereinander nach ihrer Auflösungsfähigkeit. Um eine möglichst realitätsnahe Datensimulation zu ermöglichen, wurde ein Rauschmodell entwickelt, welches sich aus normalverteiltem Rauschen des Gesamtsignals sowie 5 diskreten und zufällig verteilten Streuern geringer Amplitude zusammensetzt. Die Ergebnisse zeigen, dass die parametrischen Ansätze (Compressive Sensing und NLSE) auf synthetischen Daten die verlässlichsten Ergebnisse liefern.

Für reale Daten liegen keine Informationen über die Elevationen der Streuer vor. Um dennoch plausible Ergebnisse zu erzielen, werden die lokalen Nachbarschaftsbeziehungen entlang eines Elevationsprofils einbezogen. Durch Betrachtung der Konsistenzen der Steigungen in Elevationsrichtung kann entschieden werden, ob ein detektierter Streuer zu einer Geraden gehört oder nicht. Dieser Ansatz ist nur dann gültig, wenn das Elevationsprofil entlang von Gebäudestrukturen gelegt wird, die im SAR-Bild als Geraden abgebildet werden. NLSE liefert auch auf realen Daten sehr schlüssige Ergebnisse, wohingegen CS starke Streuungen im Vergleich zu den anderen Verfahren aufweist. Dies widerspricht den sehr vielversprechenden Ergebnissen aus der Analyse auf synthetischen Daten. Gegenstand weiterer Untersuchung könnte daher diese Diskrepanz sein. Wie die theoretische Betrachtung sowie die Analyse auf synthetischen Daten zeigt, liegt in diesem Ansatz das größte Potential für typische TomoSAR-Anwendungen.

Die maßgeblich zum Fehlerhaushalt der TomoSAR-Prozessierung beitragenden Faktoren wie Messrauschen, Basislinienausdehnung und Basislinienverteilung wurden untersucht. Hier zeigt sich, dass von den kontinuierlichen Verfahren TSVD am robustesten ist. Bei den kontinuierlichen Verfahren kommt zu diesen Fehlereinflüssen der systematische Offset in den Elevationen durch die Überlagerung der Streuer im Frequenzraum hinzu. CS und NLSE haben diesen

systematischen Offset nicht. Die größte Einschränkung für den parametrischen Ansatz NLSE ist die erforderliche Rechenkapazität. Nur für zwei Streuer können die Elevationsprofile noch in vertretbarer Zeit berechnet werden. Dies ist für viele TomoSAR-Anwendungen jedoch ausreichend.

Die auf der Spektralanalyse beruhenden Verfahren sind in ihrer Auflösungsfähigkeit durch die Rayleigh-Grenze und somit durch die Ausdehnung der gesamten Basislinie beschränkt. Da TerraSAR-X in einem sehr engen Orbitschlauch geführt wird, ist nicht mit einer Vergrößerung dieses einschränkenden Faktors zu rechnen. Somit sollte ein Hauptinteresse für die Entwicklung weiterer Verfahren in der Entwicklung von Super-Resolution-Verfahren liegen, die nicht durch die Rayleigh-Grenze beschränkt sind. Für eine geringe Störung durch Rauscheffekte sind viele Aufnahmen nötig.

TomoSAR birgt das Potential großflächig dreidimensionale Punktinformationen in urbanen Gebieten zu rekonstruieren. Die Betrachtung der Nachbarschaftsbeziehungen bietet außerdem die Möglichkeit, die gefundenen Streuer nach Plausibilität zu bewerten. Um vollständige 3D-Stadtmodelle aus den Daten zu generieren, werden außerdem Algorithmen nötig sein, die automatisch aus den TomoSAR-Ergebnissen geometrische Primitive wie Geraden, Ebenen oder auch komplexere Formen extrahieren. Methoden der Bildanalyse wie beispielsweise die Mustererkennung werden hier zum Einsatz kommen. Diese Masterarbeit zeigt dafür einen einfachen Ansatz, der die Ergebnisse der Plausibilitätsbewertung in Form einer Gewichtungsmatrix mit einbezieht. Für eine weitere Validierung könnten die TomoSAR-Ergebnisse mit den Ergebnissen anderer Sensoren, wie beispielsweise luftgestützten Laserscannern verglichen werden. Auch die Verbindung mit optischen Sensoren birgt viel Potential, um die Vorteile beider Sensortypen bestmöglich zu kombinieren.

## Anhang A

# Programmbeschreibung

Vor Nutzung der TomoSAR-Prozessierung muss die Vorverarbeitung durchgeführt werden. Dafür wird eine Projektdatei erstellt. Sie enthält unter anderem einen Bereich in Bildkoordinaten, der aus den Gesamtaufnahmen ausgeschnitten wird. Dies dient der besseren Handhabung der Daten bei beschränktem Arbeitsspeicher. Die Vorverarbeitung wird durch Aufrufen der Methode „neu\_berlin“ aufgerufen. Hier wird das Untersuchungsgebiet erneut eingeschränkt. Dieses Gebiet ist ein Objekt der Klasse „TomoPatchLukas“. Nach dem Phaseunwrapping und dem Anbringen der Atmosphärenkorrektur werden alle Objekte gespeichert. Der rechenzeit-aufwendige Schritt der Vorverarbeitung muss durch dieses Vorgehen nur einmalig durchgeführt werden. Durch Aufrufen der Methode „load\_berlin“ werden die Objekte wieder geladen. Ein Fenster erscheint auf dem das Gebiet des TomoPatches als Rechteck eingezeichnet ist. Zwei Klicks auf dieses Bild definiert die Profilgerade, für die das Elevationsprofil berechnet werden soll.

Es folgt die eigentliche TomoSAR-Prozessierung. Abbildung A.1 zeigt in einer Übersicht die übergeordnete Ablaufstruktur mit den Bezeichnungen wie im Programmcode. In gelb sind Code-Blöcke markiert, die zusammenhängend im Quelltext zu finden sind. Die roten Variablen auf der linken Seite sind die relevanten Stellgrößen, die maßgeblich das Ergebnis der TomoSAR-Prozessierung steuern. Die Schlüsselwörter „/MODELSELECTION“ und „/LSE\_PP“ steuern die optionale Modellselektion beziehungsweise die Nachbearbeitung. „peak\_out“ gibt den Wert an, ab dem lokale Maxima als solche erkannt werden. „DA\_threshold“ übergibt den Schwellwert der Amplitudendispersion. „PlausibilityThreshold“ entspricht dem Schwellwert  $V$  aus und „PlausibilityTolerance“ der Toleranz für die Steigung in Kapitel 5.1. In blau sind die entsprechenden Funktionen dargestellt. Weitere Unterfunktionen existieren, die in der Abbildung aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht abgebildet sind. Als Ergebnis werden PostScript-Dateien mit den Elevationsprofilen und Informationen über die verwendeten Parameter erstellt.

Dieser Masterarbeit ist eine Daten-CD mit dem Quellcode des IDL-Programms sowie dem Matlab-Skript für die Anbindung an cvx beigefügt. Das hier verwendete Programmpaket cvx zur Lösung konvexer Optimierungsprobleme kann unter <http://cvxr.com/cvx/> heruntergeladen werden.

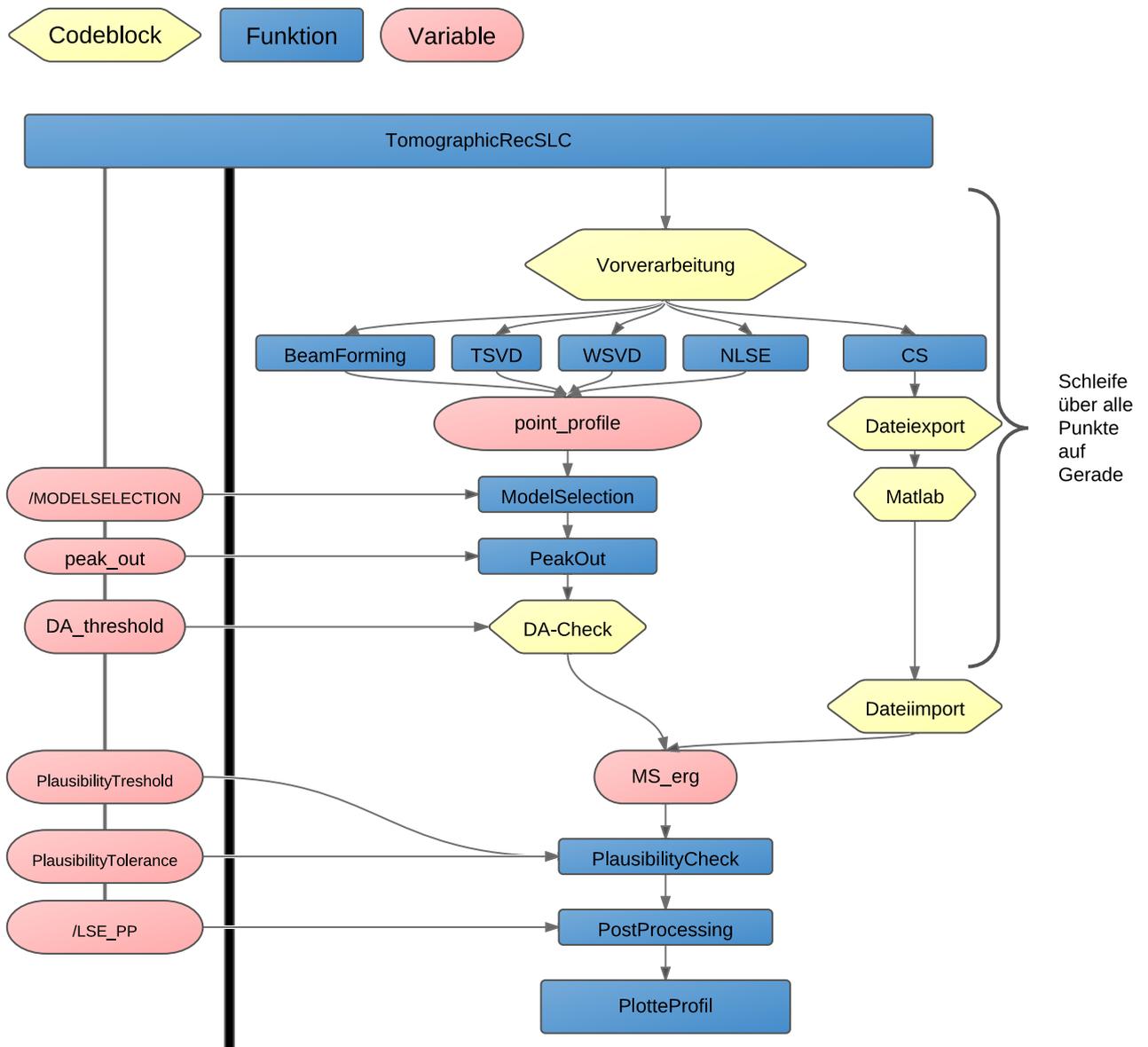


Abb. A.1: Schema des Programmablaufs.

## Anhang B

# Herleitung Beamforming

Im Folgenden wird in Ergänzung zu Kapitel 3.1 (Seite 24) dargestellt, was beim Beamforming in Matrixschreibweise geschieht. Dabei wird angenommen, dass der Messprozess rauschfrei ist und sich ein Streuer mit unbekannter Elevation  $\tilde{S}$  existiert.

Ausgang ist die Gleichung (3.1):

$$\vec{\gamma} = L^* \vec{g}$$

Das Wörterbuch  $L$  und seine Elemente sind in Kapitel 3.1 beschrieben.  $L^*$  ist die komplex konjugierte und transponierte Matrix, kurz: hermitesche Matrix von  $L$ :

$$L^* = \begin{bmatrix} \exp(-j \cdot B_1 \cdot S_1) & \exp(-j \cdot B_2 \cdot S_1) & \cdots & \exp(-j \cdot B_P \cdot S_1) \\ \exp(-j \cdot B_1 \cdot S_2) & \exp(-j \cdot B_2 \cdot S_2) & \cdots & \exp(-j \cdot B_P \cdot S_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(-j \cdot B_1 \cdot S_\delta) & \exp(-j \cdot B_2 \cdot S_\delta) & \cdots & \exp(-j \cdot B_P \cdot S_\delta) \end{bmatrix}$$

Der gemessene Vektor  $\vec{g}$  enthält die komplexen Signale der  $P$  Aufnahmen wie in Gleichung (2.16):

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} \cdot \exp(j \cdot B_1 \cdot \tilde{S}) \\ \tilde{\gamma} \cdot \exp(j \cdot B_2 \cdot \tilde{S}) \\ \vdots \\ \tilde{\gamma} \cdot \exp(j \cdot B_P \cdot \tilde{S}) \end{bmatrix}$$

Multipliziert man nun  $L^*$  mit  $\vec{g}$  so ergibt sich ein  $[\delta \times 1]$ -Vektor mit den relativen Amplituden über den gesamten Elevationsraum. Dies wird exemplarisch für die erste Zeile von  $L^*$  gemacht, das heißt für die Elevation  $S_1$ :

$$\begin{aligned}
 L_1^* \cdot \vec{g} &= \begin{bmatrix} \exp(-j \cdot B_1 \cdot S_1) & \exp(-j \cdot B_2 \cdot S_1) & \cdots & \exp(-j \cdot B_P \cdot S_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} \cdot \exp(j \cdot B_1 \cdot \tilde{S}) \\ \tilde{\gamma} \cdot \exp(j \cdot B_2 \cdot \tilde{S}) \\ \vdots \\ \tilde{\gamma} \cdot \exp(j \cdot B_P \cdot \tilde{S}) \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{p=1}^P \exp(-j \cdot B_p \cdot S_1) \cdot \exp(j \cdot B_p \cdot \tilde{S}) \cdot \tilde{\gamma} \\
 &= \sum_{p=1}^P \exp(-j \cdot B_p \cdot S_1 + j \cdot B_p \cdot \tilde{S}) \cdot \tilde{\gamma} = \sum_{p=1}^P \exp(-j \cdot B_p (S_1 - \tilde{S})) \cdot \tilde{\gamma} \\
 &= \sum_{p=1}^P \frac{1}{\exp(j \cdot B_p (\tilde{S} - S_1))} \cdot \tilde{\gamma}
 \end{aligned}$$

Ist die unbekannte Elevation  $\tilde{S}$  genau gleich der Elevation  $S_1$  so wird der Term in der inneren Klammer 0. Zwar ist  $\tilde{\gamma}$  unbekannt, jedoch für alle Aufnahmen konstant bzw. im Verhältnis zum Betrag nur gering veränderlich. Dieser Zusammenhang wird im Kapitel 2.5 über die Amplitudendispersion beschrieben. Für jede mögliche Elevation  $S_\delta$  hängt das Ergebnis also nur von  $B_p$  ab. Letztendlich ergibt sich der Vektor  $\vec{\gamma}$ , der an den Stellen geringe Absolutbeträge aufweist, wo die Differenz zwischen  $\tilde{S}$  und  $S_\delta$  groß ist und große Absolutbeträge beinhaltet wo die Differenz gering ist.

Da hier ausschließlich die Elevation und nicht die Amplitude von Interesse ist, wird  $\vec{\gamma}$  normiert:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{\gamma}}{\max\{|\vec{\gamma}|\}}$$

Das Beamforming kann auch als eine Berechnung der Korrelation zwischen der unbekanntem aber in den Daten befindlichen Elevation  $\tilde{S}$  mit allen möglichen Elevationen  $S_\delta$  aufgefasst werden. Die größte Korrelation, beziehungsweise im komplexen Fall Kohärenz, bringt die Elevation, die der gemessenen Elevation am ehesten entspricht.

# Danksagung

**Persönlichkeiten werden nicht durch schöne Reden  
geformt, sondern durch Arbeit und eigene Leistung.**  
(Albert Einstein)

Ich möchte Alexander Schunert für seine Hilfsbereitschaft und Geduld während der Betreuung dieser Masterarbeit danken. Alexander hat mir viele Zusammenhänge und Grundlagen mit Schmierpapier und Bleistift erklärt. Auch weiterhin freue ich mich darauf, auf diese Weise mit Alexander Ideen und Ansätze zu diskutieren und auszuprobieren. Genauso danke ich Uwe Sörgel für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die Gestaltungsfreiheit, die sich mir in dieser Masterarbeit eröffnet hat. Ich freue mich auf eine produktive Zusammenarbeit in Zukunft!

Vielen Dank auch an Claudia und Jana, die mir einige Anregungen für die sprachliche Formulierung gegeben und überprüft haben, ob der rote Faden in der Arbeit zu finden ist. Besonders Claudia danke ich auch für das Verständnis, wenn ich bis spät in die Nacht in der Uni blieb um an der Masterarbeit zu arbeiten. Tanja und Manuel danke ich für die erfrischenden Kaffeepausen zwischendurch.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Eltern, die mir letztendlich das Studium und somit auch diese Masterarbeit ermöglicht haben. Sie gaben mir nicht nur die Freude am eigenständigen Arbeiten sowie am Ausprobieren an neuen Dingen mit, sondern auch die Freiheit, unbeschwert meinen Interessen nachzugehen.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Übersicht der TomoSAR-Prozessierungskette. . . . .	9
2.1	Künstlerische Darstellung des Erdbeobachtungssatelliten TerraSAR-X . . . . .	11
2.2	Schema der Fouriertransformation. . . . .	12
2.3	Schema der Aufnahmegeometrie für zwei Überflugzeitpunkte. . . . .	15
2.4	Schema der Aufnahmegeometrie für einen Überflugzeitpunkt. . . . .	17
2.5	Schema Amplitudendispersion. . . . .	21
2.6	Abhängigkeit des Reflexionsprofils von Basislinienkonfiguration. . . . .	22
3.1	Größe der Singulärwerte. . . . .	29
3.2	Beispiel für ein Gridsearch-Ergebnis. . . . .	32
3.3	Beispielhafte Werte für $\epsilon$ . . . . .	34
3.4	Schematische Darstellung der Lösungen durch $L_0$ -, $L_2$ - und $L_1$ -Minimierung . . . . .	35
4.1	Schema über Ablauf der Modellselektion. . . . .	40
4.2	Beispielhafte Zusammensetzung und Verlauf des BIC . . . . .	41
4.3	Vergleich der Informationskriterien. . . . .	43
5.1	Schema der Bewertungskriterien PSLR und 3 dB-Breite. . . . .	45
5.2	Abhängigkeit der Mittelwertdifferenz $f(\Delta\mu)$ von der Rayleigh-Grenze. . . . .	48
5.3	Beispiele für Trennbarkeiten. . . . .	49
5.4	Übergang von Reflexionsprofilen auf Elevationsprofile. . . . .	50
5.5	Schema zweier theoretischer Profile über Layoverbereich. . . . .	51
5.6	Schema des Plausibilitätskriteriums Nachbarschaft. . . . .	52
5.7	Amplitudenbild mit Profil über Hochhaus Ludwig-Beck-Straße. . . . .	54
5.8	Elevationsprofil über Hochhaus Ludwig-Beck-Straße ohne Plausibilitätsprüfung. . . . .	54
5.9	Elevationsprofil über Hochhaus Ludwig-Beck-Straße mit Plausibilitätsprüfung. . . . .	55
6.1	Schema des Rauschmodells. . . . .	57
6.2	Beispielhaftes Ergebnis für das Auflösungsvermögen. Konfiguration 1. . . . .	58
6.3	Beispielhaftes Ergebnis für das Auflösungsvermögen. Konfiguration 2. . . . .	59
6.4	Beispielhaftes Ergebnis für das Auflösungsvermögen. Konfiguration 3. . . . .	60
6.5	Reflexionsprofile in Abhängigkeit des Rauschverhaltens. . . . .	62
6.6	Reflexionsprofile in Abhängigkeit der Basislinienausdehnung. . . . .	63
6.7	Reflexionsprofile in Abhängigkeit der Gleichabständigkeit der Basislinien. . . . .	66
6.8	Einordnung der Verfahren nach Robustheit und Rechenaufwand. . . . .	68
6.9	Einfluss der Modellselektion auf Elevationsprofil. . . . .	69
6.10	Elevationsprofile in Abhängigkeit von $\lambda_K$ . . . . .	71

---

6.11	3D-Modell und Luftbild eines Teils der Park Kolonnaden. . . . .	72
6.12	Vergleich der Elevationsprofile aller Rekonstruktionsalgorithmen. . . . .	72
6.13	Profil über Berliner Park Kolonnaden im SAR-Amplitudenbild. . . . .	73
6.14	Elevationsprofil über Berliner Park Kolonnaden. . . . .	74
6.15	Vergleich der Elevationsprofile aller Rekonstruktionsalgorithmen. . . . .	75
6.16	Profil im Amplitudenbild sowie Gebiet als 3D-Stadtmodell. . . . .	76
7.1	Beispiel für Nachbearbeitung. . . . .	79
A.1	Schema des Programmablaufs. . . . .	83

# Quellen

- [1] BARANIUK, R. G.: Compressive Sensing [Lecture Notes]. In: *IEEE Signal Processing Magazine* 24 (2007), july, Nr. 4, S. 118–121. <http://dx.doi.org/10.1109/MSP.2007.4286571>. – DOI 10.1109/MSP.2007.4286571. – ISSN 1053–5888
- [2] BURNHAM, K. P. ; ANDERSON, D. R.: *Model selection and multimodel inference. A practical information-theoretic approach. 2nd ed.* New York, NY: Springer. xxvi, 488 Seiten, 2002
- [3] CANDÈS, E.J. ; ROMBERG, J. ; TAO, T.: Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 52 (2006), feb., Nr. 2, S. 489 – 509. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2005.862083>. – DOI 10.1109/TIT.2005.862083. – ISSN 0018–9448
- [4] CHEN, S. S. ; DONOHO, D. L. ; SAUNDERS, M. A.: Atomic decomposition by basis pursuit. In: *SIAM Journal on scientific computing* 20 (1998), Nr. 1, S. 33–61. <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827596304010>. – DOI 10.1137/S1064827596304010. – ISSN 1064–8275
- [5] COLEMAN, T. F. ; LI, Y.: On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds. In: *Mathematical Programming* 67 (1994), 189–224. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01582221>. – ISSN 0025–5610. – 10.1007/BF01582221
- [6] D’AMICO, S. ; ARBINGER, C. ; KIRSCHNER, M. ; CAMPAGNOLA, S.: Generation of an Optimum Target Trajectory for the TerraSAR-X Repeat Observation Satellite. In: *18th International Symposium on Space Flight Dynamics* Bd. 548, 2004 (ESA Special Publication), S. 137ff
- [7] DENKER, H.: *Signalverarbeitung in der Erdmessung*. Vorlesungsskript, Leibniz Universität Hannover, 2008
- [8] DLR ; EINEDER, M. ; FRITZ, T. ; MITTERMAYER, J. ; ROTH, A. ; BÖRNER, E. ; H., H. B. ; BRÄUTIGAM, B.: *TerraSAR-X, Ground Segment, Basic Product Specification Document*. October 2010
- [9] FERRETTI, A. ; BIANCHI, M. ; PRATI, C. ; ROCCA, F.: Higher-Order Permanent Scatterers Analysis. In: *EURASIP Journal on Applied Signal Processing* vol. 2005 (2005), Nr. no. 20, S. 3231–3242. <http://dx.doi.org/10.1155/ASP.2005.3231>. – DOI 10.1155/ASP.2005.3231

- [10] FERRETTI, A. ; PRATI, C. ; ROCCA, F.: Permanent scatterers in SAR interferometry. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 39 (2001), jan, Nr. 1, S. 8–20. <http://dx.doi.org/10.1109/36.898661>. – DOI 10.1109/36.898661. – ISSN 0196–2892
- [11] FORNARO, G. ; LOMBARDINI, F. ; SERAFINO, F.: Three-dimensional multipass SAR focusing: experiments with long-term spaceborne data. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 43 (2005), april, Nr. 4, S. 702–714. <http://dx.doi.org/10.1109/TGRS.2005.843567>. – DOI 10.1109/TGRS.2005.843567. – ISSN 0196–2892
- [12] FORNARO, G. ; SERAFINO, F. ; SOLDOVIERI, F.: Three-dimensional focusing with multipass SAR data. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 41 (2003), march, Nr. 3, S. 507–517. <http://dx.doi.org/10.1109/TGRS.2003.809934>. – DOI 10.1109/TGRS.2003.809934. – ISSN 0196–2892
- [13] FRANCESCHETTI, G. ; LANARI, R.: *Synthetic aperture radar processing* (Electronic engineering systems series). – ISBN 9780849378997
- [14] GOLUB, G. ; KAHAN, W.: Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Series B, Numerical Analysis* 2 (1965), Nr. 2, pp. 205–224. <http://www.jstor.org/stable/2949777>. – ISSN 0887459X
- [15] GRAMLICH, G.: *Anwendungen der linearen Algebra*. Fachbuchverl. Leipzig im Carl-Hanser-Verl., 2004 (Mathematik-Studienhilfen). – ISBN 9783446226555
- [16] GRANT, M. ; BOYD, S.: Graph implementations for nonsmooth convex programs. In: BLONDEL, V. (Hrsg.) ; BOYD, S. (Hrsg.) ; KIMURA, H. (Hrsg.): *Recent Advances in Learning and Control*. Springer-Verlag Limited, 2008 (Lecture Notes in Control and Information Sciences), S. 95–110. – [http://stanford.edu/~boyd/graph\\_dcp.html](http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html)
- [17] GRANT, M. ; BOYD, S.: *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 1.21*. <http://cvxr.com/cvx>, April 2011
- [18] HAWKES, P.W.: *Advances in electronics and electron physics*. Academic Press, 1989 (Advances in electronics and electron physics Bd. 75). – ISBN 9780120146758
- [19] HURVICH, C. M. ; TSAI, C.: Bias of the corrected AIC criterion for underfitted regression and time series models. In: *Biometrika* 78 (1991), September, Nr. 3, 499–509. <http://dx.doi.org/10.1093/biomet/78.3.499>. – DOI 10.1093/biomet/78.3.499
- [20] LOMBARDINI, F. ; GINI, F.: Model order selection in multi-baseline interferometric radar systems. In: *EURASIP J. Appl. Signal Process.* 2005 (2005), January, 3206–3219. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1155/ASP.2005.3206>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1155/ASP.2005.3206>. – ISSN 1110–8657
- [21] NIEMEIER, W.: *Ausgleichsrechnung: Statistische Auswertemethoden*. De Gruyter, 2008 (De Gruyter Lehrbuch). – ISBN 9783110190557
- [22] PRESS, W.H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2007. – ISBN 9780521880688

- [23] REIGBER, A. ; MOREIRA, A.: First demonstration of airborne SAR tomography using multibaseline L-band data. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 38 (2000), sep, Nr. 5, S. 2142 –2152. – ISSN 0196–2892
- [24] SAKAMOTO, Y. ; ISHIGURO, M. ; KITAGAWA, G.: *Akaike information criterion statistics*. KTK Scientific Publishers, 1986 (Mathematics and its application. Japanese series). – ISBN 9789027722539
- [25] SÖRGEL, U.: *Radarfernerkundung*. Vorlesungsskript, Leibniz Universität Hannover, 2010
- [26] STOICA, P. ; MOSES, R. L.: *Introduction to spectral analysis*. Prentice Hall, 1997. – ISBN 9780132584197
- [27] ZHU, X. X.: *Spectral Estimation for Synthetic Aperture Radar Tomography*, Lehrstuhl für Methodik der Fernerkundung, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2008
- [28] ZHU, X. X. ; ADAM, N. ; BRCIC, R. ; BAMLER, R.: Space-borne high resolution SAR tomography: experiments in urban environment using TS-X Data. In: *Urban Remote Sensing Event, 2009 Joint*, 2009, S. 1–8
- [29] ZHU, X. X. ; BAMLER, R.: Tomographic SAR Inversion by  $L_1$ -Norm Regularization The Compressive Sensing Approach. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 48 (2010), oct., Nr. 10, S. 3839–3846. <http://dx.doi.org/10.1109/TGRS.2010.2048117>. – DOI 10.1109/TGRS.2010.2048117. – ISSN 0196–2892
- [30] ZHU, X. X. ; BAMLER, R.: Very High Resolution Spaceborne SAR Tomography in Urban Environment. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 48 (2010), dec., Nr. 12, S. 4296 –4308. <http://dx.doi.org/10.1109/TGRS.2010.2050487>. – DOI 10.1109/TGRS.2010.2050487. – ISSN 0196–2892
- [31] ZIBULEVSKY, M. ; ELAD, M.: L1-L2 Optimization in Signal and Image Processing. In: *IEEE Signal Processing Magazine* 27 (2010), may, Nr. 3, S. 76–88. <http://dx.doi.org/10.1109/MSP.2010.936023>. – DOI 10.1109/MSP.2010.936023. – ISSN 1053–5888

